Sucesiones

1. Escriba los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

$$a_n = (-1)^n + 2\,, \qquad b_n = 2^{-n+1}\,, \qquad c_k = \frac{k-1}{k+1}\,.$$

2. Halle la fórmula para a_n, sabiendo que los primeros términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ son:

(a) $1, 4, 9, 16, 25, 36\,;$ (b) $1, 3, 1, 3, 1, 3\,;$ (c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}\,;$ (d) $1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}\,.$

Convergencia/divergencia de sucesiones y límites

3. ¿Cuáles de las sucesiones cuyos términos generales vienen escritos más abajo son convergentes? Explique la respuesta usando la definición.

$$a_n = \frac{1}{2^n}\,; \qquad b_n = \sqrt{n}\,; \qquad c_n = 3 + (-1)^n\,.$$

4. Compruebe que las siguientes sucesiones divergen. Estudie si tienden a $+\infty$ o $-\infty$, o si son "oscilantes".

$$a_n = \frac{n^3}{10n^2 + 2009}\,; \qquad b_n = -n^2\,; \qquad c_n = \frac{1 + (-1)^n}{3 - (-1)^n}\,; \qquad d_n = (-2)^n\,.$$

5. Teniendo en cuenta los límites básicos vistos en clase, halle los siguientes límites y explique la respuesta:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}2011^n\,;$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-5)^n}{12^{n+1}}\,;$ (c) $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^k;$ (d) $\lim\limits_{k\to\infty} e^{1/(k+1)}\,.$

6. Aplicando el teorema del encaje visto en clase, deduzca la existencia y halle el valor de los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\,;$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\cos(3n) + 5\,\mathrm{sen}(n^2)}{n+1}\,;$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}}\,.$

Cálculo de límites

8. Determine los siguientes límites:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3} \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} + \pi^{-1/n} \right) \qquad \text{(c)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n]{e} + e^{-n} \right)$$

$$\text{(d)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \qquad \text{(e)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{2n} \qquad \text{(f)} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^n$$

(Sugerencia: para los tres últimos, conviene recordar que $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$).

Propiedades generales de la convergencia

9. En cada apartado, dé un ejemplo de una sucesión que tenga las propiedades que se afirman:

a) La sucesión $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ es monótona y acotada, pero $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge.

b) La sucesión $(b_{n+1}/b_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, pero $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge.

10. Sean a_n y b_n dos sucesiones acotadas superiormente y A y B sus respectivos supremos. Consideremos también $c_n = a_n + b_n$ y llamemos C a su supremo.

a) ¿Se cumple siempre $A + B \geq C$?

b) ¿Se cumple $A + B = C$ si a_n y b_n son crecientes?

c) ¿Se cumple siempre $A + B = C$?

Sucesiones definidas por recurrencias

11. Consideremos la sucesión definida por $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ para cada $n \geq 1$, con $a_1 = 1$.

a) Pruebe por inducción que $a_n < 2$ para todo n.

b) Justifique que la sucesión (a_n) es monótona creciente y halle su límite.

c) Una forma alternativa de resolver los apartados anteriores es calcular una fórmula exacta para a_n. Intente hallarla.

(Este ejercicio da sentido a la expresión $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}$, que formalmente es el resultado de iterar indefinidamente la sucesión antes indicada, y por tanto se le debe asignar el valor de su límite.)

12. Fijado $1 < t \leq 4$, consideramos la sucesión recurrente dada por

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{t}{x_n}\right) \quad \text{para } n \geq 1.$$

a) Pruebe que esta sucesión está acotada inferiormente por $\sqrt{t}$ y superiormente por 2. *Indicación*: $(a+b)^2 \geq 4ab$ para $a, b \geq 0$.

b) Demuestre que es monótona decreciente. Deduzca que $\lim x_n = \sqrt{t}$.

13. Considere la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_n = \frac{3}{2}\, a_{n-1} - \frac{1}{2}\, a_{n-2} \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

a) Pruebe que la sucesión es creciente.