

DEFINICIÓN DE DERIVADA

1. Calcule, usando la definición, las derivadas de  $f(x) = x^3$  y de  $g(x) = \cos x$ .
2. Decida razonadamente la diferenciabilidad en los puntos  $x = 0$ ,  $x = 3$  y  $x = -1$  de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ x + 1 & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

3. Supongamos que  $|f(x)| \leq x^2$  en cierto intervalo  $(-\delta, \delta)$ . Utilizar la definición de derivada para calcular  $f'(0)$ .
4. Compruebe, usando la definición de derivada,
  - a) que las funciones  $f(x) = 1/(x^2|x| + 1)$  y  $g(x) = x^2 \sin(1/x)$  verifican  $f'(0) = g'(0) = 0$ ;
  - b) que  $h(x) = x \sin(1/x)$  no es derivable en cero.

CÁLCULO DE DERIVADAS. REGLA DE LA CADENA

5. Calcule las derivadas de las siguientes funciones en los puntos donde estén definidas:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \sin\left(x + \frac{\cos x}{x}\right), & b) f(x) = \ln(e^{5x} + 1), & c) f(x) = (x + 2^x)e^x, \\ d) f(x) = \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}, & e) f(x) = \frac{x \ln x}{e^x + \sin^2 x}, & f) f(x) = e^{(e^{1/x} + 1)^2}. \end{array}$$

6. ¿Qué se obtiene al derivar tres veces la función  $f \circ g$ ? ¿Y al derivar dos veces la función  $e^f$ ?
7. La fórmula

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))'$$

se llama *derivación logarítmica* y se dice que L. Euler (matemático del siglo XVIII) lo consideraba su truco favorito. Es útil para calcular  $f'(x)$  sólo en los casos en que se pueden aplicar las propiedades de los logaritmos:  $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ ,  $\log a^b = b \log a$ .

- a) Use la derivación logarítmica para hallar las derivadas de

$$f(x) = (x^2 + 1)^7(e^x + 1)(\cos x + \sin x) \quad \text{y} \quad g(x) = (x^2 + 1)^{x^2 + 1}.$$

- b) Escriba una regla para derivar un producto de funciones  $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)$ .

PRIMERAS APLICACIONES DE LA DERIVADA

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



10. Determine el valor del parámetro real  $a$  para que la tangente a la gráfica de la función  $f(x) = x^2 - 5ax$  en el origen: (a) sea horizontal; (b) tenga pendiente  $-1$ .
11. Considerando la gráfica de  $f(x) = e^x$  y la recta tangente en el punto  $(0, 1)$ , deduzca geoméricamente la desigualdad  $1 + x \leq e^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
12. La fórmula

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^m = \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}$$

es bien conocida y se prueba por inducción o simplemente multiplicando por  $x - 1$ .

- a) Derivando, utilícela para calcular  $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 15 \cdot 2^{15}$ .
- b) ¿Cómo calcularía la suma  $1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \dots + 15^2 \cdot 2^{15}$ ?

---

#### SOBRE DERIVADAS DE FUNCIONES INVERSAS

13. Las funciones  $f(x) = \arcsen x$  y  $g(x) = \arccos x$  se definen en  $(0, 1)$  como las inversas de las funciones  $\sen x$  y  $\cos x$ , respectivamente, restringidas a  $(0, \pi/2)$ .
- a) Compruebe que  $f'(x) = -g'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ .
- b) Empleando el hecho de que  $f + g$  tiene derivada nula, halle una relación entre  $\arcsen x$  y  $\arccos x$ .

14. La función *seno hiperbólico* viene dada por  $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ . Llamamos *arcoseno hiperbólico* a su inversa. Explique por qué el arcoseno hiperbólico es derivable en todo punto y compruebe que su derivada es  $1/\sqrt{x^2+1}$ .

15. Halle una fórmula para la derivada segunda de la función inversa.

---

#### UNA APLICACIÓN COMPUTACIONAL

16. Dada una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_1 \in \mathbb{R}$ , sea  $x_2$  la intersección con el eje  $X$  de la recta tangente en  $x = x_1$  a la gráfica de  $f$ ,  $x_3$  la intersección de la tangente en  $x = x_2$  y así sucesivamente.

- a) Compruebe que la fórmula que da  $x_{n+1}$  en función de  $x_n$  es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- b) Explique geoméricamente por qué es lógico que bajo condiciones adecuadas la sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  converja a una solución de  $f(x) = 0$ .

Nota: Este método para resolver  $f(x) = 0$  se llama *método de Newton-Raphson*, y suele ser más rápida que el de bisección.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70