CLASIFICACIÓN DE GRUPOS ABELIANOS

1. Parametrizaciones de abelianos

En el tema A2 vimos que todo grupo abeliano finito puede parametrizarse como

$$G = \{g_1^{i_1} \dots g_k^{i_k} : i_j < d_j\} \qquad (*)$$

con g_j generadores de G y $d_j = |g_j|$. El problema de dicha parametrización era que algunos elementos podrían estar repetidos. Vimos que la parametrización de resolubles evitaba parcialmente dicho problema, pero a cambio de tener que elegir d_j distinto de $|g_j|$.

Vamos a ver que es posible evitar también dicha pega, es decir, que siempre es posible elegir generadores de forma que la expresión $(*)$ sea única. Eso implica que $|G| = d_1 d_2 \dots d_k$ y que la multiplicación es muy sencilla:

$$(g_1^{r_1} \dots g_k^{r_k})(g_1^{s_1} \dots g_k^{s_k}) = g_1^{\overline{r_1+s_1}} \dots g_k^{\overline{r_k+s_k}} :$$

con $\overline{r_j + s_j} < d_j$ el residuo de $r_j + s_j$ módulo d_j.

De hecho, si esto es así, tendríamos que G es isomorfo al grupo

$$\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{d_k}$$

por el homomorfismo

$$(g_1^{i_1}, g_2^{i_2}, \dots, g_k^{i_k}) \mapsto (\overline{i_1}, \overline{i_2}, \dots, \overline{i_k}).$$

y habríamos comprobado que *todo grupo abeliano finito es isomorfo a un producto de cíclicos.* En el curso de la demostración también veremos que esta expresión como producto es esencialmente única.

2. Clasificación como producto de cíclicos

Comencemos por demostrar un lema sobre órdenes de elemento de un grupo abeliano que es de interés por sí mismo.

Lema 2.1 (Orden maximal)**.** *Sea G un grupo abelianos finito. Sea a un elemento de orden máximo d en G. Se cumple que todo elemento de G tiene orden divisor de d.*

Demostración. Supongamos que no es así, y que por tanto existe un elemento b_0 de orden no divisor de d. Así, $|b_0| = mp$ con $p \nmid d$, p primo. Pero entonces $b = b^m$ tiene orden p. Podemos comprobar que ab tiene orden dp, lo que da una contradicción. $\square$

Con este resultado es sencillo demostrar la unicidad de como producto de cíclicos en el siguiente sentido

Lema 2.2 (Unicidad producto de cíclicos)**.** *Si*

$$G \cong C_{d_1} \times C_{d_2} \times \ldots \times C_{d_k} \cong C_{m_1} \times C_{m_2} \times \ldots \times C_{m_l}$$

con $d_i > 1$ múltiplo de d_{i+1} y $m_i > 1$ múltiplo de m_{i+1} para todo i, entonces $l = k$ y $m_i = d_i$ para todo i.

Demostración. Supongamos que las dos factorizaciones son distintas. Entonces, tomemos el primer factor distinto, digamos $d_j > m_j$, $d_i = m_i$ para todo $i < j$. En ese caso, tenemos

$$G \cong H \times K \cong H \times K'$$

con H el producto de los primeros $j-1$ factores, $K = C_{d_j} \times \ldots$, $K' = C_{m_j} \times \ldots$. Pero miremos ahora a los elementos de orden d_j en G. Por la segunda factorización tenemos que sólo están los de la forma (h, k), con h un elemento de orden d_j de H, y k cualquier elemento de K. Por la primera factorización, además de esos, tendríamos $(1, g)$, con g el generador de $C_{d_1} \times 1 \ldots \times 1$. Así, vemos que por la segunda factorización habría más elementos de orden d_j, lo que es una contradicción.

□

Ahora vamos con el resultado principal

Lema 2.3 (Clasificación de abelianos como productos de cíclicos)**.** *Todo grupo G abeliano finito es isomorfo a un grupo*

$$C_{d_1} \times C_{d_2} \times \ldots \times C_{d_k}$$

con d_{i+1} divisor de d_i para todo $i \geq 1$.

Demostración. Lo vamos a demostrar por inducción en el tamaño de G. Podemos suponer que G no es cíclico. Tomamos a un elemento de orden máximo en G, y consideramos el grupo cociente $G/\langle a \rangle$. Por inducción, tenemos que se cumple $(*)$ para este grupo, es decir

$$G/\langle a \rangle = \{\overline{g_1}^{i_1} \ldots \overline{g_k}^{i_k} : i_j < d_j\}.$$

con d_i múltiplo de d_{i+1}, donde dicha expresión es única. Esa parametrización en $G/\langle a \rangle$ implica que

$$G = \{a^i \tilde{g}_1^{i_1} \ldots \tilde{g}_k^{i_k} : i < d, i_j < d_j\}. \qquad (**)$$

con $\tilde{g}_i$ cualquier elemento en la clase de g_i. Vamos a ver que para cualquier $\overline{x} \in G/\langle a \rangle$ de orden s se cumple que $s \mid d$ y que es posible encontrar $\tilde{x} \in G$ en la clase de x tal que $\tilde{x}^s = e$. Escogiendo dichos $\tilde{g}_i$ nos da que $(**)$ es la parametrización que buscábamos.

Como $\overline{x}^s = \overline{e}$, tenemos que el orden de x es un múltiplo de s y por tanto $s \mid d$. Entonces, de $\overline{x}^s = \overline{e}$ deducimos que $x^s = a^{\lambda s+r}$ con $0 \leq r < s$, luego $(xa^{-\lambda})^s = a^r$. Elevando por d/s tenemos que $e = a^{rd/s}$, que implica $r = 0$, luego concluimos que $(xa^{-\lambda})^s = e$ y por tanto $\tilde{x} = xa^{-\lambda}$ funciona. Así, vemos que $(**)$ es la parametrización que buscábamos para G.

$\square$

En la práctica, si a, b son coprimos se tiene que $C_{ab} \cong C_a \times C_b$, por lo que la factorización en cíclicos se puede transformar en una factorización por primos:

$$G \cong \prod_{p||G|} C_{p^{\alpha_1}} \times C_{p^{\alpha_2}} \times \ldots \times C_{p^{\alpha_{k_p}}}$$

con $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$. Dicha factorización vuelve a ser única. Por ejemplo, podemos escribir los grupos abelianos de orden $360 = 8 * 9 * 5$ como

$$C_8 \times C_9 \times C_5, C_4 \times C_2 \times C_9 \times C_5, C_2^3 \times C_9 \times C_5,$$
$$C_8 \times C_3^2 \times C_5, C_4 \times C_2 \times C_3^2 \times C_5, C_2^3 \times C_3^2 \times C_5.$$

Sin usar la factorización en primos, dichos grupos serían

$$C_{360}, C_{180} \times C_2, C_{90} \times C_2 \times C_2,$$
$$C_{120} \times C_3, C_{60} \times C_6, C_{30} \times C_6 \times C_2.$$