Comunicación de Datos

25 de noviembre de 2013

Nombre: ______________________________ **D.N.I.**: ______________

1. Considere los códigos $\hat{\mathcal{H}}_r$ con matriz de comprobación de paridad de la forma

$$\hat{H}_r = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ & & 0 & & \\ & P_e & \vdots & P_i & \\ & & 0 & & \end{bmatrix}$$

donde P_e (respectivamente, P_i) es la matriz que tiene por columnas todos los vectores binarios no nulos de longitud $r-1$ y peso par (resp., impar).

a) Indique la longitud y dimensión de $\hat{\mathcal{H}}_r$ **(1 punto)**

b) Razone con precisión que la distancia de estos códigos es 4 **(1 punto)**

c) $\widehat{\mathcal{H}}_r$ corrige todos los errores simples y algunos dobles. ¿Qué síndromes están asociados a los errores dobles corregibles? ¿Cuántos son? **(1 punto)**

d) Escriba explícitamente la matriz $\widehat{H}_3$ y úsela para decodificar el vector $1110\dots0$. **(1 punto)**

a) Es una familia de códigos $[2^{r-1}, 2^{r-1}-r]$, la de los códigos Hamming extendidos. Vea que las r filas de $\hat{H}_r$ son linealmente independientes: basta con reordenar las columnas de $\hat{H}_r$ para obtener una submatriz $r \times r$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

no singular.

b) No hay columnas nulas ni repetidas, luego $d_C > 2$; la distancia es par, por la primera fila de $\hat{H}_r$; si se toman dos columnas cualesquiera $(1, \mathbf{c}_1)^T$, $(1, \mathbf{c}_2)^T \in \mathbb{F}_2^r$ de $\hat{H}_r$, las columnas $(1, \mathbf{c}_1)^T + (1, \mathbf{c}_2)^T + (1, \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)^T + (1, \mathbf{0})^T = \mathbf{0}$ son linealmente dependientes, lo que prueba que la distancia es 4.

c) Los errores dobles corregibles tienen todos ellos síndromes de la forma $(1, \mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \mathbb{F}_2^{r-1}$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$. Hay, por tanto, $2^{r-1}-1$ errores dobles corregibles.

d) $\hat{H}_3$ es la matriz de comprobación de paridad del código $[4,1]$ de repetición. El vector (1110) se decodifica como (1111).

2. (1 punto) Sea H la matriz de comprobación de paridad de un código lineal. Si en H existen w columnas linealmente dependientes, entonces el código posee una palabra de peso w cuyos símbolos no nulos son precisamente los índices de esas columnas. Utiliza esta propiedad para probar que en un código lineal $d_C \leq n-k+1$. Este resultado se llama cota de Singleton.

Cualquier conjunto de $n-k+1$ columnas de H es linealmente dependiente, pues el rango de H es $n-k$. Así, existirá alguna palabra del código de peso $n-k+1$ cuyos símbolos son los índices de tales columnas y necesariamente $d_c \leq n-k+1$.

3. (1 punto) Demuestre que el polinomio generador de un código cíclico de longitud n es un divisor de $x^n - 1$.

Por el algoritmo de división euclídeo $x^n - 1 = q(x)g(x) + r(x)$ para ciertos polinomios cociente $q(x)$ y resto $r(x)$ únicos, con $r(x)$ de grado menor que el de $g(x)$. Pero entonces

$$r(x) = -q(x)g(x) \mod x^n - 1$$

lo que significa que $r(x)$ sería una palabra del código —todos los múltiplos de $g(x)$ lo son— con grado menor que $g(x)$, lo que es imposible a menos que $r(x) = 0$.

4. El polinomio

$$g(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x^3+1)$$

genera un código cíclico binario $[15,8]$ y todos sus factores son primitivos.

a) Use las propiedades que conozca para determinar la distancia del código **(0.75 puntos)**

b) Decodifique el vector recibido $x^{14}+x^{13}+x^{11}+x^{10}+x^7$. **(0.75 puntos)**

a) El polinomio generador tiene peso par ($g(1) = 0$), así que la distancia es par. Como x^4+x^3+1 es primitivo, los errores dobles de distancia menor que 15, que son todos, son detectables; y como $g(x)$ tiene peso 4, la distancia es 4.

b) $x^{14}+x^{13}+x^{11}+x^{10}+x^7 = x^7 g(x) + x^{10}$. Puesto que los errores simples son corregibles con este código, el decodificador estima la palabra $x^7 g(x)$.

5. Considere un enlace con las siguientes características: $C = 1$ Mb/s, $T_{\text{as}} = 100$ ms y $\kappa = 5 \cdot 10^{-6}$ (κ es la probabilidad de error por bit). Suponga que se usa un protocolo ARQ de envío continuo y rechazo selectivo con $m = 100$.

a) ¿Cuánto vale el tamaño óptimo de trama? **(0.5 puntos)**

b) ¿Para qué rango de valores de longitud de trama no supera la cadencia eficaz los 500 kb/s? **(1 punto)**

a) La expresión para la cadencia eficaz (normalizada) en la estrategia de rechazo selectivo es

$$\frac{C_e}{C} = \big(1-\kappa(n+m)\big)\frac{n}{n+m} = \frac{n}{n+m} - \kappa n.$$

Si se supone continua la variable n, el tamaño óptimo de trama es la solución de la condición de primer orden

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{C_e}{C}\right) = \frac{m}{(n+m)^2} - \kappa = 0,$$

es decir $n^* = -m + \sqrt{m/\kappa}$. Para los datos del enunciado

$$n^* = -100 + \sqrt{\frac{100}{5 \cdot 10^{-6}}} = \frac{10^4}{\sqrt{5}} - 100 \approx \frac{10^4}{\sqrt{5}}.$$

b) Los puntos de corte son la solución de la ecuación cuadrática

$$\big(1-\kappa(n+m)\big)\frac{n}{n+m} = \frac{1}{2},$$

o bien

$$\kappa n^2 - n\big(\frac{1}{2} - \kappa m\big) + \frac{m}{2} = 0$$

cuyas raíces son

$$\begin{aligned} n^* &= \frac{(1/2-\kappa m) \pm \sqrt{(1/2-\kappa m)^2 - 2m\kappa}}{2\kappa} \approx \frac{(1/2-\kappa m) \pm (1/2 - 3\kappa m)}{2\kappa} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\kappa} - 2m \approx 10^5 \text{ bits} \\ m = 100 \text{ bits.} \end{cases} \end{aligned}$$

La cota de 500 kb/s no se supera si $n < 100$ bits o si $n > 10^5$ bits.

6. Suponga que dos ordenadores quieren transmitir sendos archivos de 10^{12} bits a través de un canal compartido utilizando cada uno un protocolo ARQ de parada y espera. Suponga que $n = 10^4$, desprecie m y tome $T_{\text{as}} C = n$. ¿Cuánto tiempo se usará el canal? **(1 punto)**

En las condiciones del enunciado ($T_{\text{as}} C = n$) los dos ordenadores pueden actuar de manera perfectamente coordinada, entrelazando las transmisiones de sus tramas de modo que no existan tiempos de espera. Es decir, pueden utilizar el canal como lo haría una estrategia de envío continuo con rechazo selectivo ideal. La cadencia eficaz que pueden conseguir es entonces

$$\frac{C_e}{C} = 1 - p = 1 - \kappa n.$$

El tiempo de uso del canal sería

$$T = \frac{2 \cdot 10^{12}}{C_e} = \frac{2 \cdot 10^{12}}{(1 - \kappa n) C}.$$