Física Cuántica II (3er curso del Grado en Física) Junio de 2014

Alumnos con evaluación continua: Deben procurar contestar tanto a la cuestión como a los problemas.
Alumnos con solamente examen presencial: Debe superar el 40 % de la nota máxima de cada parte por separado.
Cuestiones: conteste breve y razonadamente, ajustándose a la pregunta y explicando lo que hace.
Problemas: debe resolverlos, no sólo decir cómo se se podrían resolver, ni poner la solución, sino que **hay que resolverlos realmente, explicando con claridad los pasos y discutir los resultados**. Recuerde definir **todas** las variables que use y **explicar** la notación y las fórmulas que utilice.
No haga números hasta haber obtenido una expresión algebraica (estime entonces en órdenes de magnitud).
Solamente se permite el uso de un libro de Tablas y Fórmulas matemáticas, sin añadido alguno.

CUESTIONES (puntuación: hasta 1,5 puntos por cuestión)

C1.- (para todos los estudiantes)
Una partícula de masa m se encuentra encerrada en una caja cúbica de lado L; es decir, está sometida a un potencial $V(x,y,z) = 0$ si $0 < x < L$, $0 < y < L$, $0 < z < L$, y $V(x,y,z) = \infty$ en los demás casos. A este potencial se le añade una perturbación $V_p(x,y,z) = V_0\, L^3\, \delta(x - L/4)\, \delta(y - 3L/4)\, \delta(z - L/4)$.
Calcular la energía del estado fundamental a primer orden en teoría de perturbaciones.

C2.- (solamente deben responderla los estudiantes que no hayan realizado la evaluación continua)
Sean E_0 la energía del nivel fundamental (no degenerado) y E_1 la del primer nivel excitado de un hamiltoniano $\widehat{H}$.
a) Demuestre que si $\varepsilon \in [E_0, E_1]$, entonces para cualquier estado ϕ se tiene que $\langle\phi|(\widehat{H} - E_0)(\widehat{H} - \varepsilon)|\phi\rangle \geq 0$.
b) Como consecuencia, si ψ es un estado tal que $\langle\widehat{H}\rangle_\psi < E_1$, demuestre que para cualquier ε tal que $\langle\widehat{H}\rangle_\psi < \varepsilon \leq E_1$ se tiene que

$$\langle\widehat{H}\rangle_\psi \;\geq\; E_0 \;\geq\; \langle\widehat{H}\rangle_\psi - \frac{\left(\Delta\widehat{H}\right)^2_\psi}{\varepsilon - \langle\widehat{H}\rangle_\psi},$$

que permite acotar E_0 entre dos valores.

PROBLEMAS (puntuación: hasta 3,5 puntos por problema)

P1.- (para todos los estudiantes)
Un oscilador armónico isótropo bidimensional de frecuencia ω es perturbado por un potencial de la forma $\widehat{H}_p = \lambda(\widehat{X}\widehat{L}_z + \widehat{L}_z\widehat{X})$, donde λ es un parámetro con las dimensiones adecuadas. Calcular las correcciones a primer orden en la función de onda y hasta segundo orden en la energía del estado fundamental.
Ayuda: Para un oscilador armónico unidimensional, $[\widehat{H}_0, \widehat{X}^2] = (i\hbar^3/m)\left(\widehat{X}\widehat{P}_x + \widehat{P}_x\widehat{X}\right)$.

P2.- (para todos los estudiantes)
Dos partículas idénticas de masa m , sin espín y que no interactúan entre sí, están sometidas a un potencial armónico isotropo de modo que el hamiltoniano del sistema es

$$H_0 = \sum_{i=1}^{2}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x_i^2 + y_i^2\right)\right]$$

donde el subíndice i se refiere a la partícula i-ésima.
a) Obtener las energías y las degeneraciones de los dos primeros niveles energéticos del sistema.
b) Estando el sistema en su estado fundamental, en el instante $t = 0$ empieza a actuar una perturbación dependiente del tiempo $\widehat{W}(t) = \left(\widehat{X}_1 + \widehat{X}_2\right)\gamma t$, donde γ es una constante con las dimensiones físicas adecuadas.

$\int_0^\infty r^n e^{-ar} dr = n!/a^{n+1}$ $\quad\int_0^t \exp(-x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(t)$ $\quad\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right)$

$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$ $\quad\int x\cos^2 x\, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x)$

$\int x^2\cos^2 x\, dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\sin(2x)$

Formulario para examen de *Física Cuántica II*

- **Matrices de Pauli**

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Átomo hidrogenoide**

$$R_{nl}(r) = \frac{2Z^{3/2}}{n^2 a_0^{3/2}} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}} \left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^l \mathrm{L}_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right) \exp\left(-\frac{Zr}{na_0}\right) \qquad \mathrm{L}_{q-p}^{p}(u) = (-1)^p \frac{d^p}{du^p}\mathrm{L}_q(u)$$

- **Perturbaciones independientes del tiempo**

$$E_n^{(1)} = \left\langle \psi_n^{(0)} \middle| \widehat{H}_p \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle \qquad E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} \frac{\left|\left\langle \psi_k^{(0)} \middle| \widehat{H}_p \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle\right|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

$$\left|\psi_n^{(1)}\right\rangle = \left|\psi_n^{(0)}\right\rangle + \sum_{k\neq n} \frac{\left\langle \psi_k^{(0)} \middle| \widehat{H}_p \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \left|\psi_k^{(0)}\right\rangle$$

- **Perturbaciones dependientes del tiempo**

$$\lambda A_{ik}^{(1)}(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t} e^{\mathrm{i}\Omega_{ki}(\tau - t_0)} \langle \psi_k^{(0)} | \lambda \hat{W}(t) | \psi_i^{(0)} \rangle d\tau \qquad \text{con} \qquad \Omega_{ki} = \left(E_k^{(0)} - E_i^{(0)}\right)/\hbar$$

$$\lambda^2 A_{ik}^{(2)}(t) = -\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)^2 \sum_n \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' e^{\mathrm{i}\Omega_{kn}(\tau - t_0)} e^{\mathrm{i}\Omega_{ni}(\tau' - t_0)} \langle \psi_k^{(0)} | \lambda \hat{W}(\tau) | \psi_n^{(0)} \rangle \langle \psi_n^{(0)} | \lambda \hat{W}(\tau') | \psi_i^{(0)} \rangle$$

Para perturbaciones periódicas, $\widehat{W}(t) = \widehat{W} \sin \omega t$,

$$P_{n\to m}^{\mathrm{Born}}(t) \simeq \left| \frac{\langle m | \hat{W} | n \rangle t}{2\hbar} \right|^2 \frac{\sin^2\left(\dfrac{\omega - |\Omega_{mn}|}{2}\right) t}{\left(\dfrac{\omega - |\Omega_{mn}|}{2} t\right)^2}$$

- **Oscilador armónico**

$$\widehat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\widehat{X} + i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\widehat{P}_x\right) \qquad \widehat{a}\,\phi_n(x) = \sqrt{n}\,\phi_{n-1}(x)$$

$$\widehat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\widehat{X} + i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\widehat{P}_x\right) \qquad \widehat{a}^+\phi_n(x) = \sqrt{n+1}\,\phi_{n+1}(x)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \qquad \hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$