Matemáticas II (GIB) - 2/7/2015 **Final Extraordinario.**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 150 minutos**

TEST. (20 puntos) Tiempo 50 minutos

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +1.0 **Error -0.25** En blanco 0.

SI NO

1. ☐ ☒ Si $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \sqrt{2}\}$, entonces, $\min A = \sqrt{2}$.

2. ☒ ☐ Si el conjunto A es numerable, y $B \subset A, B \neq \emptyset$ no es finito, entonces B es numerable.

3. ☒ ☐ Si $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ entonces $a + \dfrac{1}{b} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

4. ☐ ☒ Si $f : S \to T$ es sobreyectiva, entonces la función $g : S \to f(S), x \mapsto g(x) = f(x)$ es invertible.

5. ☐ ☒ $\bigcap_{k=1}^{\infty} \left([-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]\right) = \emptyset$.

6. ☒ ☐ Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\}$. Entonces $\forall \delta > 0, B(1; \delta) \cap A \neq \emptyset$.

7. ☒ ☐ Si las funciones $f + g$ y f son derivables en $a \in \mathbb{R}$, entonces la función g es continua en $a \in \mathbb{R}$.

8. ☒ ☐ Si $\forall n \in \mathbb{Z}^+ a_n > 0$ y $\{a_n\}$ es decreciente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente si y sólo si $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

9. ☒ ☐ La suma inferior de la función $\operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$ para la partición $P = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$ vale 0.

10. ☒ ☐ $\displaystyle\lim_{A \to 0} \int_A^1 \frac{1}{x^p} dx$ existe si y sólo si $p < 1$.

Continúa por detrás ....

11. $\boxed{x}$ $\boxed{}$ Si $f(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas en (x_0, y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

12. $\boxed{x}$ $\boxed{}$ Suponga que $f(x,y)$ es una función que admite derivadas parciales continuas hasta orden 2, y que la matriz hessiana de f en un punto crítico es diagonal. Si los elementos de la diagonal principal son no nulos y de distinto signo, entonces dicho punto crítico no es un extremo de la función f.

13. $\boxed{}$ $\boxed{x}$ Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciable. Entonces, si $x_0 \in \mathbb{R}^m$ es tal que $Df(x_0) \neq 0$, entonces x_0 no puede ser un punto crítico de f.

14. $\boxed{}$ $\boxed{x}$ Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = l$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$.

15. $\boxed{x}$ $\boxed{}$ El punto $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ es un máximo relativo de la función $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

16. $\boxed{}$ $\boxed{x}$ El volumen V de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ viene dado por $V = 4 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$.

17. $\boxed{}$ $\boxed{x}$ Si $f(x,y)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $\nabla f(0,0) = (0,1)$, entonces el origen puede ser un extremo de f en $\mathbb{R}^2$.

18. $\boxed{x}$ $\boxed{}$ El polinomio de Taylor centrado en 0 de la función $f(x) = (x-2)^2 - 4$ es $x^2 - 4x$.

19. $\boxed{}$ $\boxed{x}$ Sea la función $f(x,y) = y^2 + \cos x$. f alcanza un máximo relativo en $(0,0)$.

20. $\boxed{}$ $\boxed{x}$ Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces, f es diferenciable en (x_0, y_0) si y sólo si existe el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right) \begin{pmatrix} (x-x_0) \\ (y-y_0) \end{pmatrix} \right|}{||(x-x_0, y-y_0)||}.$$

.

Matemáticas II (GIB) - 2/7/2015 **Problema 1 (40 puntos)**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 50 minutos**

Por favor, comience sus respuestas en esta hoja.
Respuestas sin justificar recibirán poca o ninguna puntuación.

A. **(10 puntos)** Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ sucesiones reales tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Demuestre mediante la definición que entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

B. **(30 puntos)** Se define $f(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt$,

a) **(10 puntos)**Encuentre razonadamente el dominio de f y argumente por qué es diferenciable en su dominio. Demuestre que es una función invertible en su imagen.

b) **(10 puntos)** Halle el dominio de la función inversa.
(Indicación1: muestre que f no es acotada ni superior ni inferiormente y razone con la continidad de f. Indicación 2: recuerde que la serie harmónica es divergente.)

c) **(5 puntos)** Halle la derivada de la función inversa.

d) **(5 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden n de f, centrado en $x = 1$ y escriba f como este polinomio más un resto en forma de Lagrange.

SOLUCION:

A. Puesto que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dado $\varepsilon > 0$ se tendrá que existen $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ tales que, $n > N_a \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $n > N_b \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Eligiendo $N := \max\{N_a, N_b\}$ ambas condiciones se cumplen simultáneamente y se tendrá que

$$n > N \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

B.

a) La función $\dfrac{1}{t}$ está definida, es continua y acotada en todo intervalo de la forma $[1, x]$ con $x > 0$, por lo tanto es integrable Riemann en dicho intervalo y consecuentemente la función f no sólo está definida sino que por el TFC, es diferenciable en un tal intervalo. Además, f es positiva para $x > 0$ y negativa para $0 < x < 1$. Para $x \le 0$ la función f no está definida, ya que la función integrando, no es acotada en el correspondiente intervalo y la integral de Riemann no tiene sentido. Por tanto, el dominio de f es $\mathbb{R}^+$.
La condición necesaria y suficiente para que una función sea invertible en su imágen es que sea inyectiva en su dominio. Pero esto se prueba fácilmente en nuestro caso. En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}^+$. Entonces:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^y \frac{1}{t} dt \Leftrightarrow \int_1^x \frac{1}{t} dt - \int_1^y \frac{1}{t} dt = 0 \Leftrightarrow \int_y^x \frac{1}{t} dt = 0.$$

Ahora bien, si suponemos $x \neq y$, al ser $\frac{1}{t}$ estrictamente positiva entre x e y, la integral ha de ser estrictamente positiva, lo que supone una contradicción. Así sólo puede ser $x = y$, por lo que f es inyectiva.

b) El dominio de la inversa es la imagen de la función f. Veámos que f no está acotada superiormente. En efecto, es fácil ver a partir de una sencilla gráfica que, dado $N \in \mathbb{N}, N > 1$, se tiene que

$$0 < \sum_{n=1}^{N-1} 1 \cdot \frac{1}{n+1} < \int_1^N \frac{1}{t} dt.$$

Por otro lado, es fácil ver que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} 1 \cdot \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k}$, que es una suma harmónica. Por tanto, como la serie harmónica es divergente, dado $M > 0$ existe $N_M \in \mathbb{N}$ tal que $M < \displaystyle\sum_{k=2}^{N_M} \frac{1}{k}$, es decir,

$$\forall M > 0,\ \exists N_M \in \mathbb{N}, M < \int_1^{N_M} \frac{1}{t} dt,$$

es decir $M < f(N_M)$ por lo que f no está acotada superiormente.

Así, dado cualquier real $r \geq 0$, existe un $N_M \in \mathbb{N}$ tal que $r < f(N_M)$. Pero como f es continua en $[1, N_M]$, el teorema de los valores intermedios nos garantiza que $r \in [0, f(N_M)] \subset \mathrm{Im}(f)$, y, por tanto, $[0, +\infty) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Análogamente podemos ver que f no es acotada inferiormente. En efecto, para $0 < x < 1$ tendremos que $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt$. De nuevo puede verse a partir de una gráfica que dado $N \in \mathbb{N}, N > 1$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} < \int_{\frac{1}{N}}^{1} \frac{1}{t} dt,$$

que de nuevo es una suma harmónica que puede hacerse tan grande como se desee. Por tanto, f puede hacerse tan pequeña como se desee y tampoco está acotada inferiormente.

Razonando análogamente al caso $r \geq 0$ podemos ver que todo $r < 0$ pertenece a la imagen de f, por lo que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

c) Puesto que f es diferenciable, por el teorema de la función inversa sabemos que

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{f^{-1}(x)}} = f^{-1}(x),$$

donde hemos aplicado el TFC.

d) Obsérvese que la función f es C^∞ en su dominio $\mathbb{R}^+$. Así, es posible escribir el polinomio de Taylor de cualquier orden para f centrado en $x = 1$. Obviamente $f(1) = 0$. por otro lado, aplicando el TFC en el primer paso tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}; f''(x) = -\frac{1}{x^2}; f'''(x) = (-1)^2 \frac{2}{x^3}; \ldots \\ \ldots\ldots & \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n}. \end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio pedido es

$$P_{n,1}^f = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + (-1)^{(n-1)} \frac{1}{n}(x-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Así f, puede escribirse, en función de un resto de Lagrange, como

$$f(x) = P_{n,1}^f + (-1)^n (x) \frac{(x-1)^{(n+1)}}{(n+1)\xi^{(n+1)}},\ 1 < \xi < x.$$

Matemáticas II (GIB) - 2/7/2015 **Problema 2 (40 puntos)**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 50 minutos**

Por favor, comience sus respuestas en esta hoja.
Respuestas sin justificar recibirán poca o ninguna puntuación.

A. **(20 puntos)** Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. **(5 puntos)** Estudie la continuidad de f en todo su dominio.
2. **(5 puntos)** Calcule (en los puntos del dominio donde existan) $f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
3. **(5 puntos)** Calcule las derivadas direccionales $D_u f(0,0)$ para todo vector unitario $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$.
4. **(5 puntos)** Estudie la diferenciabilidad de f en todo su dominio.

B. **(20 puntos)** Encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las funciones $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ y $g(x,y) = x^2+y^2$.

SOLUCION:

A.)

1. En $R = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ f es continua por ser cociente de funciones continuas (y no anularse el denominador). En cuanto al punto $(0,0)$, como

$$0 \leq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = |x|\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0\,,$$

el criterio del sándwich garantiza que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

y, por tanto, como $(0,0)$ es punto de acumulación del dominio, f es continua en dicho putno y, en consecuencia, en $\mathbb{R}^2$.

2. En R la función f es una función racional y el denominador no se anula, por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Por otro lado, en $(0,0)$ tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Por tanto, f tiene derivadas parciales en todo su dominio.

3. Sea $\theta \in [0, 2\pi)$. La derivada direccional de f en $(0,0)$ según la dirección $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ es:

$$\begin{aligned} D_u f(0,0) = D_{(\cos\theta,\sin\theta)} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t\cos\theta, 0+t\sin\theta) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3\cos\theta\sin^2\theta}{t^2(\cos\theta+\sin^2\theta)} - 0}{t} = \cos\theta\sin^2\theta \end{aligned}$$

4. Como f tiene en R derivadas parciales y éstas son continuas, f es diferenciable en R. Sin embargo, si f fuera diferenciable en $(0,0)$, entonces se cumpliría que

$$D_u f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot u = 0\,,$$

lo cual es falso si, por ejemplo, tomamos $u = (\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, en cuyo caso, como hemos visto en el apartado anterior, se tiene

$$D_{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})}(0,0) = \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

Por tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

B.) Las gráficas de f y g tienen en común los puntos que verifican

$$x^2 + y^2 - \sqrt{x^2+y^2} = 0\,.$$

Si definimos $r = \sqrt{x^2+y^2}$, la ecuación anterior queda $r^2 - r = 0$, cuyas soluciones son $r = 0$ y $r = 1$. Así, la intersección de ambas gráficas es:

$$\big\{(0,0,0)\big\} \cup \big\{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1\big\}\,.$$

Por otro lado, si $r \in [0,1]$, entonces $r^2 \leq r$, luego el volumen que nos piden se calcula de la siguiente manera:

$$V = \iint_{B_1(0,0)} f(x,y) - g(x,y)\,dxdy = \iint_{B_1(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\,dxdy\,.$$

Si hacemos un cambio de variable a coordenadas polares (recuérdese que, en dicho cambio, $g(r,\theta) = \big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big)$ con $r > 0$ y $\theta \in (0, 2\pi)$, y $|Jg(r,\theta)| = r$), tenemos que

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(r - r^2)\,drd\theta = 2\pi\Big[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big] = \frac{\pi}{6}\,.$$