Hoja 6: Integrales

1.- Calcular, aplicando directamente la definición, $\int_0^2 x\,dx$.

2.- Probar que la función $y=[x]$ es integrable en $[0,5]$ y calcular $\int_0^5 [x]\,dx$.

3.- Expresar como integrales los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,n+k}, \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)\,k}{n^3}.$$

4.- Sea f una función continua en $[a,b]$, no negativa, y que cumple $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Probar que f es cero en todos los puntos.

5.- Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo $[a,b]$, no integrable, y tal que f^2 sea integrable.

6.- Demostrar que, para cada $c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$, se tiene:

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx, \qquad \int_a^b f(c\,x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{a\cdot c}^{b\cdot c} f(x)\,dx.$$

7.- Sea una función continua en $[a,b]$. Definimos la *media* o *valor esperado* de f sobre $[a,b]$ como

$$E(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

(a) Sean M y m respectivamente el máximo y el mínimo de f sobre [a,b]. Demostrar que $m\le E(f)\le M$. Si f es constante, ¿cuál es su valor esperado?

(b) Usando el teorema de los valores intermedios y el apartado anterior probar el siguiente resultado:

Sea f una función continua en $[a,b]$. Entonces, existe $c\in[a,b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

9.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,1], \\ x+1 & \text{si} \quad x \in (1,2]. \end{cases}$$

Definimos F con $F(0) = 0$ y $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, si $x \in (0,2]$. Determinar F de forma explícita y probar que es continua en el intervalo $[0,2]$, aunque f no lo sea.

10.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^{x^2} (\operatorname{sen} t^2)\, \log(1+t^2)\,dt, \qquad G(x) = \int_{-e^x}^{\operatorname{sen}^2 x} \cos(\log(2\,t^2))\,dt.$$

11.- Encontrar una función f definida y continua en $[0,\infty)$ tal que

$$\int_0^{x^2} (1+t)\, f(t)\,dt = 6\,x^4.$$

12.- Sea $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x < 3, \\ x+a & \text{si} \quad 3 \le x \le 4. \end{cases}$$

¿Qué valor debemos dar a a para que exista una función F en $[0,4]$ con $F'(x) = f(x)$? Encontrar todas las funciones F posibles que cumplan la condición anterior.

13.- Evaluar las siguientes integrales indefinidas:

(1) $\displaystyle\int (6\,x^2-8)^{25}\,x\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,x^2+8}$ (3) $\displaystyle\int \frac{3\,x^2+2\,x-1}{x+2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2\,e^x-1}\,dx$ (5) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+8}\,dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+4}\,dx$

(7) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (9) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{9\,x^2+6\,x+5}$ (11) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3-3\,x+2}\,dx$ (12) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-x^2+4\,x-4}\,dx$

(13) $\displaystyle\int \frac{e^x+3\,e^{-x}}{e^{2\,x}+1}\,dx$ (14) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3\,\cos x}$ (15) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

(16) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$ (17) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$ (18) $\displaystyle\int \frac{x^5+2\,x+1}{x^4+2\,x^2+1}\,dx$

(19) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2\,(x^2+3)}$ (20) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ (21) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

(22) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (23) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\,\cos x}$ (24) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

(25) $\displaystyle\int dx$ (26) $\displaystyle\int \log x\,dx$ (27) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

14.-

(a) Hallar $\int \tan x\,dx$, $\int \tan^2 x\,dx$. Calcular $\int \tan^n x\,dx$, expresando esta integral en términos de $\int \tan^{n-2} x\,dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \tan^{10} x\,dx$ y para $\int \tan^{13} x\,dx$.

(b) Hallar $\int \sec^2 x\,dx$, $\int \sec^3 x\,dx$. Calcular $\int \sec^n x\,dx$, expresando esta integral en términos de $\int \sec^{n-2} x\,dx$. Como aplicación dar una fórmula para $\int \sec^{14} x\,dx$ y para $\int \sec^9 x\,dx$.

15.- Calcular los siguientes límites expresándolos como límites de sumas de Riemann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n^{r+1}}, \qquad r > 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n\,(n+n)}} \right).$$

16.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y en caso afirmativo calcular su valor:

$$(1)\ \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx \qquad (2)\ \int_2^\infty \frac{x}{x^2 - x - 2}\,dx \qquad (3)\ \int_0^1 \log x\,dx \qquad (4)\ \int_1^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx$$

$$(5)\ \int_2^\infty \frac{dx}{x\,\log^2 x}\,dx \qquad (6)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{4+x^2}\,dx \qquad (7)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}} \qquad (8)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

17.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$(1)\ \int_1^\infty e^{-x}\,x^\alpha dx, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (2)\ \int_0^\infty \frac{dx}{2\,x + (x^3+1)^{\frac{1}{2}}} \qquad (3)\ \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$(4)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(-\log x)^\alpha\,x}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (5)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\cosh x}\,dx \qquad (6)\ \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$$

18.-

(a) Demostrar la fórmula de reducción $\displaystyle\int x^\alpha\,e^{\beta\,x}\,dx = \frac{1}{\beta}\,x^\alpha\,e^{\beta\,x} - \frac{\alpha}{\beta}\int x^{\alpha-1}\,e^{\beta\,x}\,dx$, para $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$.

(b) La función Γ se define para $x > 0$ como $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}\,e^{-t}$. Demostrar que se tiene $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. Deducir entonces que $\Gamma(n+1) = n!$.

19.-