INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA EMPRESA
EJERCICIOS — APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

1. Interpretación económica de la derivada.

Los siguientes ejercicios están pensados para que revises el concepto de marginal y su relación con la derivada.

Ejercicio 1. Actualmente estamos vendiendo cierto producto a un precio unitario $p_0 = 72$ €. El beneficio marginal para este precio de venta es positivo. ¿Nos compensaría subir ligeramente el precio de venta?

(a) Sí, porque en este caso a mayor precio de venta obtendremos mayor beneficio.
(b) No podemos saberlo porque depende de la forma concreta de la función de beneficio.
(c) No, porque a mayor precio de venta habrá menor demanda y por tanto menor beneficio.

Ejercicio 2. Si una empresa vende q unidades de su producto al mes obtiene un beneficio de $B(q) = -q^2 + 60q - 500$ euros.

1. Actualmente se venden 15 unidades al mes, y surge la oportunidad de hacer una campaña publicitaria —a coste cero para la empresa— que incrementaría las ventas a 18 unidades al mes. Calcula *aproximadamente* cuál sería el cambio en el beneficio. ¿Merece la pena hacer la campaña publicitaria?
2. Ahora estamos vendiendo 34 unidades al mes, y se nos vuelve a plantear la posibilidad de hacer una campaña publicitaria. Sin embargo, en esta ocasión *no* sabemos en cuánto va a incrementar dicha campaña nuestras ventas. ¿Recomendarías hacer la campaña publicitaria?

Ejercicio 3. Una empresa es la única proveedora de un determinado bien, que vende a precio p €/ud. Ha estimado que a precio p la demanda es $Q(p) = 3600 - p^2$ ud. El coste de producir q unidades es $C(q) = 500 + 2q$ €. Se supone que la empresa satisface *toda* la demanda de su producto.

1. Calcula la función de beneficio $B(p)$ para la empresa.
2. Si vende a precio $p = 10$ €/ud, ¿puede incrementar un poco el precio sin tener pérdidas? ¿Y si vende a $p = 40$ €/ud?

Ejercicio 4. Supón que $C(q)$ e $I(q)$ son las funciones de costes e ingresos correspondientes a la producción y venta de q unidades de determinado bien. Actualmente estamos produciendo q_0 unidades.

(a) Imaginemos que $C_{\mathrm{Mar}}(q_0) > I_{\mathrm{Mar}}(q_0)$. Si produjésemos una unidad más (pasando de q_0 a $q_0 + 1$ unidades), ¿nuestro beneficio aumentaría o disminuiría? ¿Y si produjésemos una unidad menos? ¿Y si fuese el coste marginal menor que el ingreso marginal?
(b) Supongamos que queremos hallar el nivel de producción q_0 que hace máximo nuestro beneficio. A la vista del apartado anterior, ¿qué relación debe existir entre el coste y el ingreso marginales a ese nivel de producción?

Ejercicio 5. La fabricación de determinado bien tiene por función de coste medio

$$\bar{C}(q) = q + 1 + \frac{1200}{q},$$

donde q es el número de unidades producidas. Asimismo, la demanda viene determinada por el precio a través de la función de demanda

$$Q(p) = 300 - p,$$

donde p es el precio de venta por unidad.

(a) Calcula la función de costes $C(q)$ y los costes fijos.
(b) Calcula cuál es el coste marginal cuando se producen 10 unidades y explica la interpretación económica del resultado.
(c) Calcula la función de beneficio $B(q)$. (*Indicación.* Recuerda que $q = Q(p)$. Tendrás que despejar p en términos de q en la función de demanda).
(d) Actualmente estamos vendiendo $q_0 = 50$ unidades al mes. Tenemos la posibilidad de contratar una campaña de publicidad que costaría 1000 € e incrementaría las ventas a 52 unidades al mes. ¿Es conveniente contratar la campaña? Argumenta tu respuesta en términos de marginales.

2. Estudio de la monotonía de una función.

Ejercicio 6. De una función $f(x)$ se sabe que su dominio es $\mathbb{R} - \{0, 2\}$, y que allí es derivable y satisface $f'(x) > 0$. ¿Podemos asegurar que $f(1) < f(3)$? ¿Y que $f(3) < f(4)$?

Ejercicio 7. Estudia el dominio y la monotonía de las siguientes funciones, señalando dónde se encuentran los máximos y mínimos locales:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

3) $f(x) = -3x^4 + 4x^3$

4) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$

5) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

7) $f(x) = e^x(x-1)$

8) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

9) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

10) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

11) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

12) $f(x) = \dfrac{8-3x}{x^2-2x}$

13) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

14) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

15) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x}{2-x}$

16) $f(x) = \dfrac{8}{x^3-3x^2}$

17) $f(x) = x^2 \ln\, x$

18) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x}$

3. Optimización de funciones.

Ejercicio 8. Al optimizar cierta función $f(x)$ sujeta a la restricción $2 \le x \le 4$ el máximo global resulta ser único y se encuentra en $x = 3$. Si ahora buscamos el máximo global de $f(x)$ sujeta a la restricción $0 \le x \le 4$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(a) El máximo global debe seguir encontrándose en $x = 3$.
(b) Al cambiar la restricción el máximo global ya no tiene por qué encontrarse en $x = 3$.
(c) El valor del nuevo máximo global será menor que el anterior.

Ejercicio 9. Cierto proceso productivo tiene por función de coste marginal

$$C_{\text{Mar}}(q) = q^2 - 625,$$

donde q es la cantidad producida. Suponiendo que exista una cantidad q_* que minimiza el coste, indicar cuál de las siguientes opciones sería:

(a) $q_* = 25$.
(b) $q_* = -25$.
(c) $q_* = 5$.

En clase de teoría utilizamos la fórmula (o "desarrollo") de Taylor de orden 2 para justificar el criterio de la derivada segunda de clasificación de puntos críticos. Los siguientes tres ejercicios son precisamente acerca de ese desarrollo de Taylor.

Ejercicio 10. Considera la función $f(x) = e^x$ y el punto de referencia $x_0 = 0$.

(a) Utilizando la fórmula de Taylor de orden 1, calcula el valor aproximado de $e^{0,1}$, $e^{0,5}$ y e^1. Compara las aproximaciones que has obtenido con los valores reales y determina así el error de aproximación.
(b) Repite lo mismo que en el apartado anterior pero usando la fórmula de Taylor de orden 2. ¿Observas una mejora en el error de aproximación?

Ejercicio 11. De una función $f(x)$ se sabe que su desarrollo de Taylor de orden 2 en el punto $x_0 = -1$ es

$$f(x) = 2 - (\Delta x) + 2(\Delta x)^2.$$

(a) Determina cuánto valen $f(-1)$, $f'(-1)$ y $f''(-1)$.
(b) Si además se sabe que f es *par*, ¿cuánto valen $f(1)$, $f'(1)$ y $f''(1)$? ¿Y si f es *impar*?

Ejercicio 12. Cuando justificábamos en teoría que una función que verifica $f'(x_0) > 0$ en un punto localmente creciente en torno a ese punto utilizamos la fórmula de Taylor de orden 1. ¿Por qué no utilizamos la de orden 2, ya que es más precisa?

Ejercicio 13. Para cada una de las siguientes funciones, encuentra (si existen) su máximo y su mínimo global en el intervalo que se especifica (si no se especifica ninguno, se entiende que se buscan máximos y mínimos globales en todo $\mathbb{R}$):

1) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ 4) $f(x) = -x^3 + 3x - 1$ en $[-2, 2]$

5) $f(x) = |-x^3 + 3x - 1|$ en $[-2, 2]$

8) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ 9) $f(x) = x^3 e^{-x}$ en $[-2, 2]$

Ejercicio 14. Un artesano ha determinado que, para cierto producto, el coste medio por unidad está dado por la función

$$\bar{C}(q) = 2q^2 - 36q + 210 - \frac{216}{q},$$

donde q es la producción mensual. Las limitaciones del artesano le impiden producir más de 10 unidades al mes, y mantener el negocio sólo le resulta rentable si fabrica al menos 2 unidades al mes.

1. ¿A qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad?
2. ¿Y si se han de producir al menos 5 unidades al mes?

Ejercicio 15. Somos productores de un bien que podemos fabricar en dos plantas distintas **A** y **B**. Ambas fábricas tienen funciones de costes distintas:

$$\mathbf{A} : C_A(q) = 2100 + 2q + 6q^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{B} : C_B(q) = 1900 + q + 8q^2.$$

Si queremos producir 6000 unidades en total, ¿cuántas debemos producir en **A** y cuántas en **B** para minimizar los costes?

Ejercicio 16. Un impresor debe fabricar un libro de modo que cada página contenga 18 cm^2 de texto impreso y los márgenes sean de 2 cm el superior y el inferior y de 1 cm los laterales. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que el gasto en papel sea mínimo?

Ejercicio 17. Una empresa compra planchas rectangulares de cartón de 1 m por 2 m para fabricar las cajas en las que embala su producto. Para formar cada caja se toma una plancha, se recorta un cuadrado de cada esquina (todos del mismo tamaño) y luego se pliega de modo que resulta una caja sin tapa.

1. ¿Cuál debe ser el tamaño de los recortes en las esquinas para que las cajas tengan volumen máximo?
2. Responde a la misma pregunta del apartado anterior pero suponiendo ahora que la empresa fabrica latas de altura 30 cm, de modo que las cajas tienen que tener también esa altura como mínimo.

4. Representación gráfica de funciones.

Ejercicio 18. Del mismo modo que una función se puede "pegar a una recta" en $+\infty$ ó $-\infty$ y en ese caso hablamos de una asíntota oblicua (que puede ser horizontal si su pendiente es cero), también se puede "pegar a una parábola".

(a) Recuerda que en clase argumentamos cómo se podían calcular la pendiente m y la ordenada en el origen n de una asíntota oblicua, dando fórmulas para ellas en términos de límites. Teniendo en cuenta que la expresión genérica de una parábola es $ax^2 + bx + c$, argumenta igual que hicimos en clase para obtener fórmulas para a, b y c.

(**Indicación para el apartado (a).** Si en clase empezábamos dividiendo f entre x para hallar m, ahora tendrás que empezar dividiendo entre x^2.)

Ejercicio 19. Representa gráficamente las funciones

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

3) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

4) $f(x) = \ln \dfrac{x + 3}{x - 3}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x + 2}$

6) $f(x) = xe^{1/x}$

7) $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

8) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

9) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

10) $f(x) = x^{-2}e^x$

11) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

12) $f(x) = \dfrac{2|x|}{x^2 + 1}$

Sugerencia. Para representar la última función se sugiere dibujar primero la gráfica olvidándose del valor absoluto y luego obtener geométricamente a partir de ella la gráfica con el valor absoluto.

5. Interpretación de la derivada como recta tangente.

Ejercicio 20. Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}.$$

Señala cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la gráfica de f y calcula la ecuación implícita de su recta tangente en cada uno de ellos:

(a) $(1, -1/2)$, (b) $(0, 2)$, (c) $(-1, 2)$, (d) $(0, -1)$, (e) $(2, 1/3)$.

¿Cuáles de las rectas tangentes que has calculado están "inclinadas hacia la derecha"? ¿Cuáles están "inclinadas hacia la izquierda? ¿Qué información te da eso sobre la función f?

Ejercicio 21. Calcula la pendiente de la recta tangente a $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 0$. Interpreta gráficamente el resultado que obtienes (la función $f(x) = \sqrt{x}$ —o una muy parecida a ella— la dibujaste en el apartado (b) del Ejercicio 6 de la hoja "Conceptos básicos").

6. Algunos problemas más con enunciado económico.

Ejercicio 22. El editor de una revista comprueba que si fija un precio de $p = 3$ € por unidad vende 15000 ejemplares al mes, pero si sube el precio a $p = 4{,}50$ € por unidad, sólo vende 14100 ejemplares al mes.

1. Suponiendo que la relación entre precio y demanda sea lineal, calcula la función de demanda $Q(p)$.
2. Suponiendo que los costes fijos son 1000 € y el coste de producir una revista es de 5 céntimos de euro, calcula el nivel de producción que permite obtener el máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Ejercicio 23. (Examen de enero de 2012) Para el producto de un monopolista, la función coste total es

$$C(q) = \frac{1}{3}q^3 + 20q + 500$$

y la función demanda (que expresa a qué precio P puede vender el monopolista cuando hay una demanda q de su producto) es

$$P(q) = 320 - \frac{5}{2}q,$$

donde $q \geq 0$ es el número de unidades y P y C se expresan en euros por unidad.

1. Determine el nivel de producción en el que se maximiza el beneficio.
2. Determine el precio de máximo beneficio.
3. Determine el beneficio máximo.

Ejercicio 24. Un fabricante ha determinado que el coste total C de funcionamiento de una fábrica es

$$C(q) = \frac{1}{2}q^2 + 15q + 5000,$$

donde q es el número de unidades producidas. ¿A qué nivel de producción es mínimo el coste medio por unidad?

Ejercicio 25. Un fabricante puede producir, como mucho, 420 unidades de cierto artículo cada año. La ecuación de demanda para ese producto es

$$P(q) = q^2 - 100q + 3200,$$

y la función de coste promedio

$$\bar{C}(q) = \frac{2}{3}q^2 - 40q + \frac{10000}{q}.$$

Determina el beneficio máximo que puede obtener el fabricante.

Ejercicio 26. (Examen de enero de 2015) Una empresa de decoración de interiores de alto diseño ha realizado un estudio en el que muestra la relación existente entre el ingreso de la empresa y la inversión realizada en publicidad. Dicha relación viene dada por la siguiente expresión:

$$I(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + 1000$$

miles de euros, donde x son los *miles* de euros destinados en publicidad. El coste en

1. Calcular el ingreso marginal cuando se destinan en publicidad 2000 €.
2. Calcular el ingreso que se obtiene durante el primer año y el cuarto, es decir, $t = 1$ y $t = 4$.
3. Calcular el ingreso marginal en $t = 1$.
4. Calcular el nivel de inversión en publicidad que maximiza el ingreso.
5. ¿A que convergerá el ingreso a largo plazo?