Universidad Rey Juan Carlos

Estructuras Algebraicos
Grados con Matemáticas
Curso 2015-16

Hoja 1: Anillos

---

1. **Anillos booleanos.** Se dice que un anillo A es booleano si $\forall a \in A$ se cumple $a^2 = a$. En este ejercicio vamos a construir una familia de ejemplos importante de anillos booleanos. Durante todo el ejercicio consideramos $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de las partes de X, es decir, el conjunto formado por todos los subconjuntos de X. También consideramos la operación $B \uplus C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ (se suele llamar diferencia simétrica de B y C y también es igual a $(B \cup C) \setminus (B \cap C)$).

   a) Verifica si $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ es un anillo.

   b) Verifica si $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ es un anillo.

   c) Prueba que $(\mathcal{P}(X), \uplus, \cap)$ es un anillo conmutativo unitario.
   Nota: La demostración de la propiedad asociativa de $\uplus$ y de la propiedad distributiva son pesadas, así que se dejan como opcionales. En caso de querer hacerlo puede ayudar escribir la pertenencia a los conjuntos como proposiciones y usar la lógica proposicional. También se puede intentar una demostración informal y visual utilizando diagramas de Venn.

   d) Demuestra que el anillo del apartado anterior es booleano. Demuestra que todos sus elementos cumplen la ecuación $x + x = 0$ (esto es cierto en general en cualquier anillo booleano). ¿Cuáles son los elementos invertibles de este anillo?

2. Demuestra, a partir de la definición y de las propiedades ya vistas en teoría, que las siguientes propiedades son cietas en cualquier anillo A dados elementos cualesquiera $a, b \in A$:

   a) $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

   b) $-(-a) = a$

   c) $-(a + b) = -a - b$

   d) $-(a - b) = b - a$

   e) $(-a)(-b) = ab$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.