

# Antenas de hilo II

Grupo de Electromagnetismo Aplicado  
Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones  
Universidad Carlos III de Madrid

Luis Inclán Sánchez

- Teoría de imágenes
- Antenas hilo y planos conductores: Ver y Hor

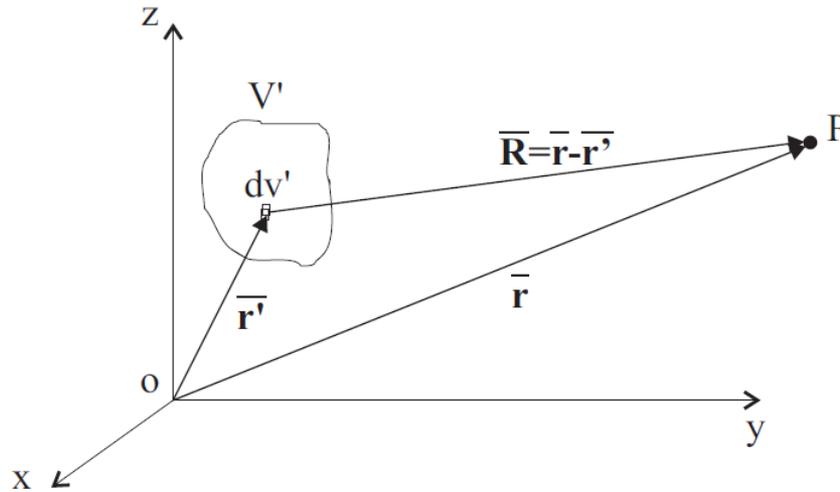
**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Teoría de Imágenes



## Potenciales electrodinámicos

Hilo corriente

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dv'$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H}$$

Procedimiento para obtener el CEM radiado lejano

Integración de una corriente  $J$  > Potencial Vector  $A$  > Obt. Campo  $H$  > Obt. Campo  $E$

¿Qué ocurre con las condiciones de contorno?

¿Cambio de medio material?

Cartagena99

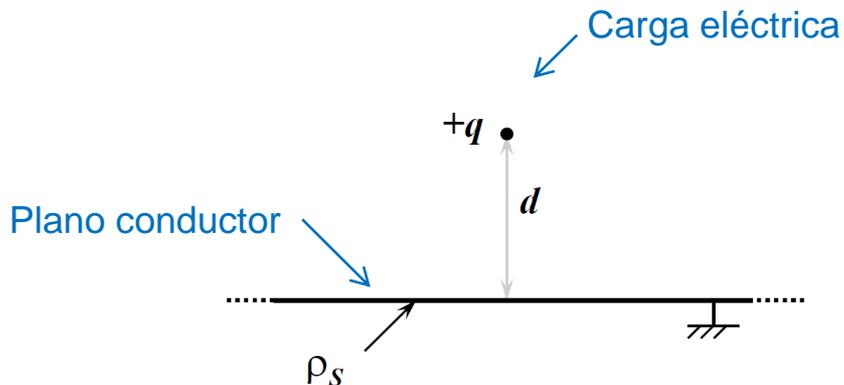
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transmisión y Propagación. Gra. Ing. Comunicaciones Mov. y Esp. Curso 20/21

# TEORÍA DE IMÁGENES (I)



**Electrostática**  
 Solucionar problemas complejos con una técnica sencilla

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

- Resolver la ecuación  
 - Condiciones de contorno

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

**La solución, para unas condiciones de contorno es única**

Da lo mismo como encuentre la solución, si cumple las mismas condiciones es la buena

- Se trata de sustituir el problema original por otro que lo simplifica: "un modelo"

- Si el modelo produce que las condiciones de contorno sean idénticas a

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

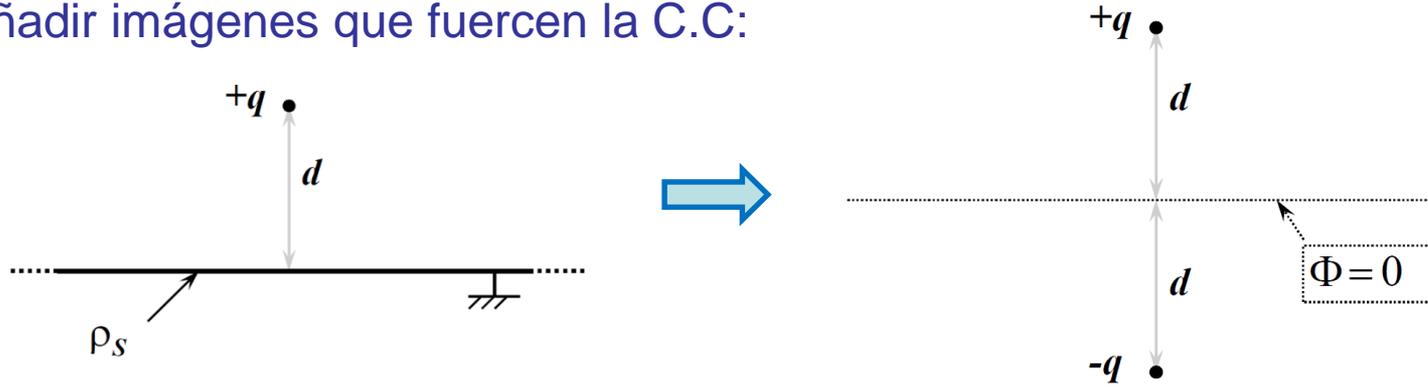
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Teoría de imágenes: Método de las imágenes (II)

Añadir imágenes que fuercen la C.C:



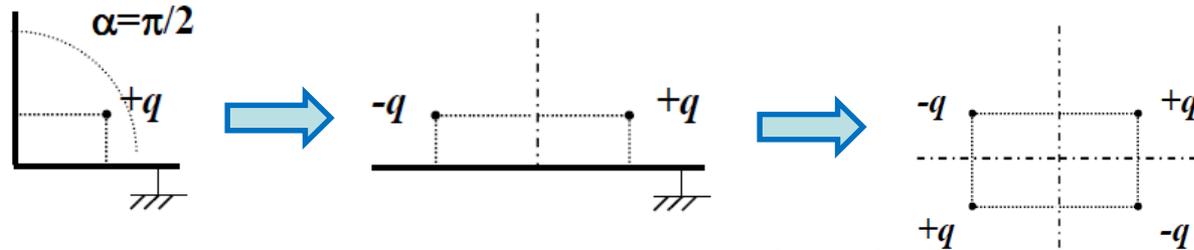
Conductor eléctrico perfecto (planos de masa o cualquier buen conductor cerca de nuestra antena)

$$\hat{n} \cdot \vec{B}_2 = 0$$

$$\hat{n} \cdot \vec{H}_2 = 0$$

$$\hat{n} \times \vec{E}_2 = 0$$

$$\hat{n} \times \vec{H} = \vec{j}$$



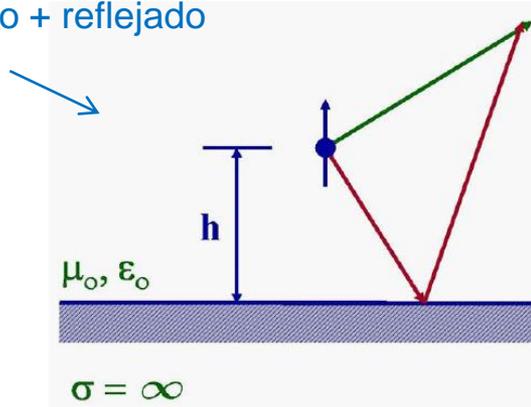
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

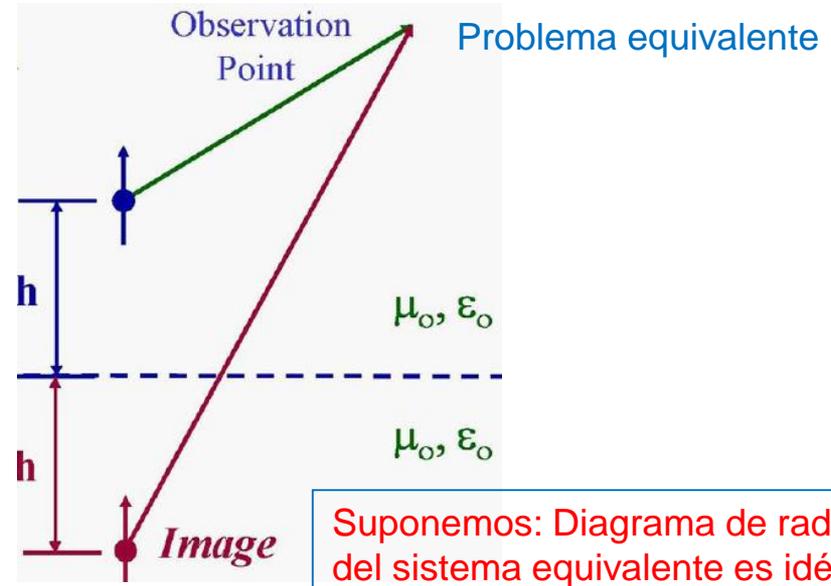
# Teoría de imágenes: Antenas de hilo (pol. Vertical) (III)

El buen conductor produce una reflexión

Aproximación de dos rayos  
Directo + reflejado



La presencia del obstáculo altera de forma sustancial el campo radiado



Suponemos: Diagrama de radiación del sistema equivalente es idéntico al del problema original

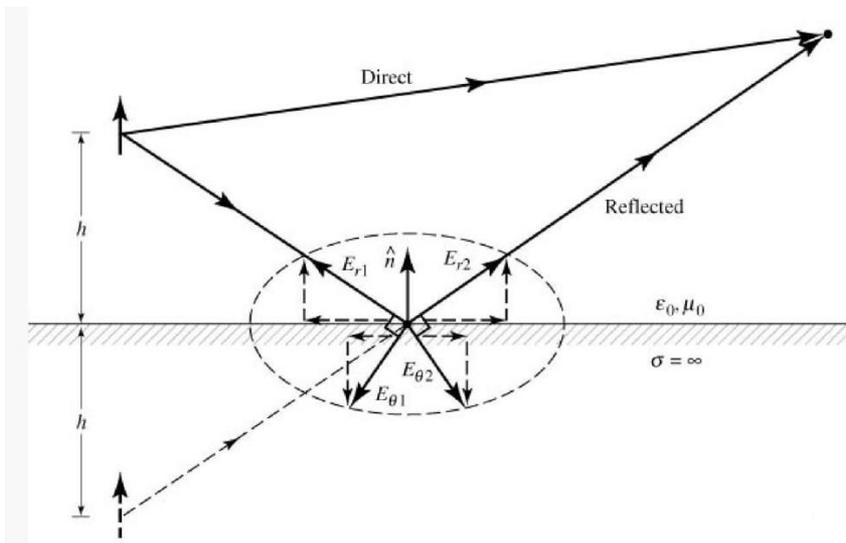
- Se introduce una fuente de campo imaginaria en la parte inferior que sustituye a la reflexión producida en el plano conductor
- Suponemos una reflexión perfecta (no siempre pero válido en muchas ocasiones)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Detalle de las componentes vectoriales Polarización vertical



Campo dipolo: rayo directo

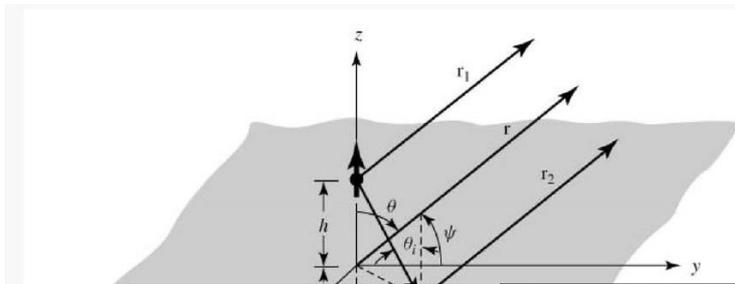
$$E_{\theta}^d = j\eta \frac{kI_o \ell e^{-jkr_1}}{4\pi r_1} \sin \theta_1$$

Campo dipolo: rayo reflejado

$$E_{\theta}^r = R_v \left\{ j\eta \frac{kI_o \ell e^{-jkr_2}}{4\pi r_2} \sin \theta_2 \right\}$$

$R_v=1$

Campo total  $E_{\theta}^t = E_{\theta}^d + E_{\theta}^r$



Aproximación de campo lejano

$$r_1 = r - h \cos \theta$$

Fase

$$r_2 = r + h \cos \theta$$

$$r_1 \cong r_2 \cong r$$

Amplitud

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

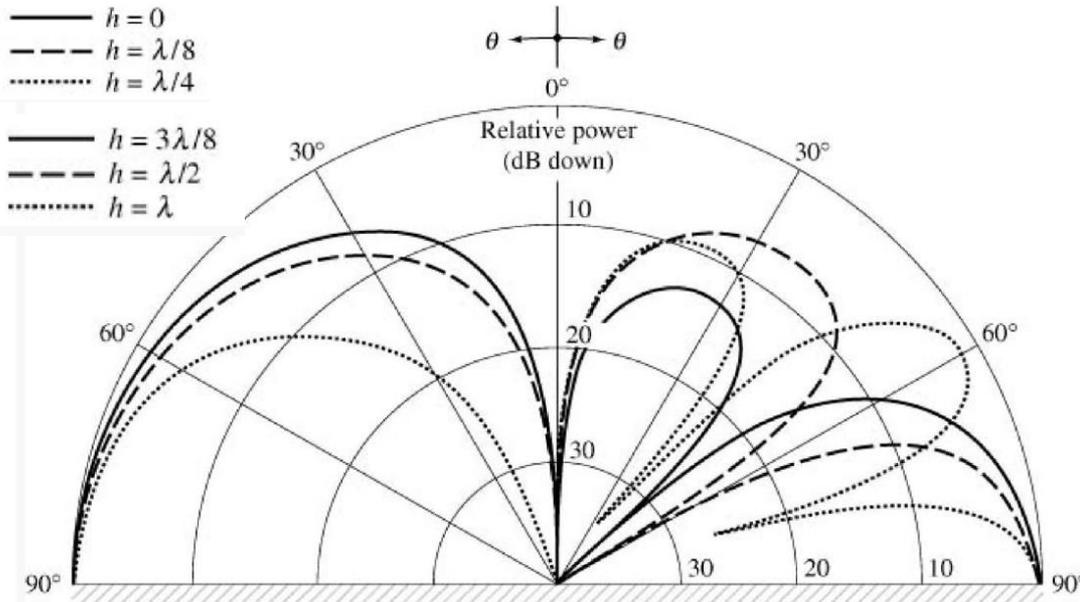
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## ❑ Campo radiado

$$E_{\theta} = j\eta \underbrace{\frac{kI_o \ell e^{-jkr}}{4\pi r}}_{\text{Element Factor}} \sin \theta \underbrace{\{2 \cos(kh \cos \theta)\}}_{\text{Array Factor}} \quad z \geq 0$$

$$E_{\theta} = 0 \quad z < 0$$



### Parámetros

$$U = r^2 W_{av} = r^2 \left[ \frac{1}{2\eta} |E_{\theta}|^2 \right]$$

$$U = \frac{\eta}{2} \left| \frac{I_o \ell^2}{\lambda} \right| \sin^2 \theta \cos^2(kh \cos \theta)$$

$$D_o = \frac{4\pi U_{\max}}{P_{\text{rad}}} = \frac{2}{\left[ \frac{1}{3} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3} \right]}$$

**Cartagena99**

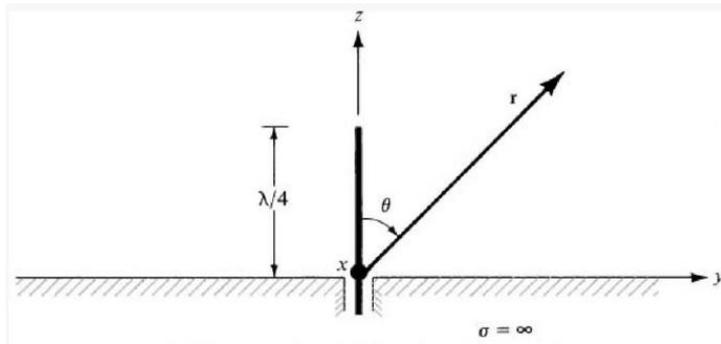
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

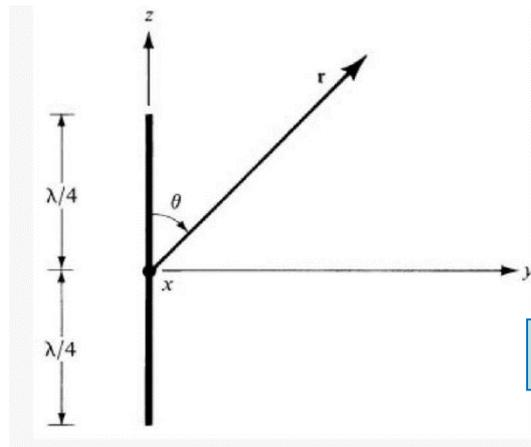
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transmisión y Propagación. Gra. Ing. Comunicaciones Mov. y Esp. Curso 20/21

## Monopolo lambda cuartos



Monopolo sobre plano conductor



Modelo equivalente: teoría imágenes



Solución conocida: dipolo lambda medios

# Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

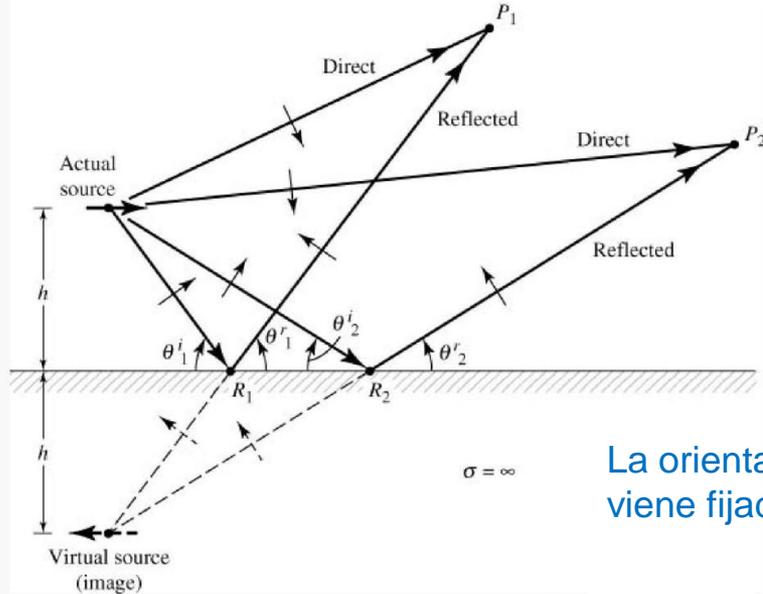
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transmisión y Propagación. Gra. Ing. Comunicaciones Mov. y Esp. Curso 20/21

8

# Teoría de imágenes: Antenas de hilo (pol. Horizontal) (IV)



La orientación de la fuente imaginaria viene fijada por las C.C

$$E_{\psi}^d = j\eta \frac{kI_o l e^{-jkr_1}}{4\pi r_1} \sin \psi$$

$$E_{\psi}^r = jR_h \eta \frac{kI_o l e^{-jkr_2}}{4\pi r_2} \sin \psi$$

$$= -j\eta \frac{kI_o l e^{-jkr_2}}{4\pi r_2} \sin \psi$$

Aproximación de campo lejano

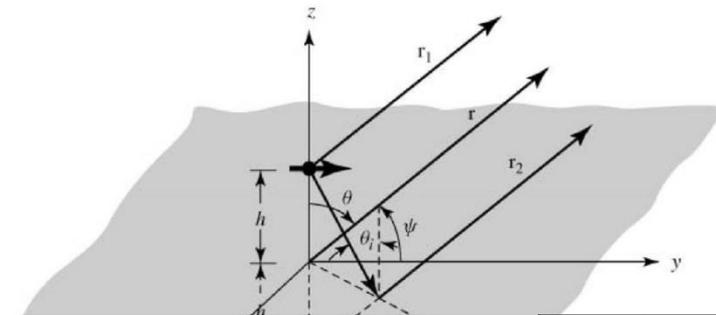
$$r_1 = r - h \cos \theta$$

Fase

$$r_2 = r + h \cos \theta$$

$$r_1 \cong r_2 \cong r$$

Amplitud



**Cartagena99**

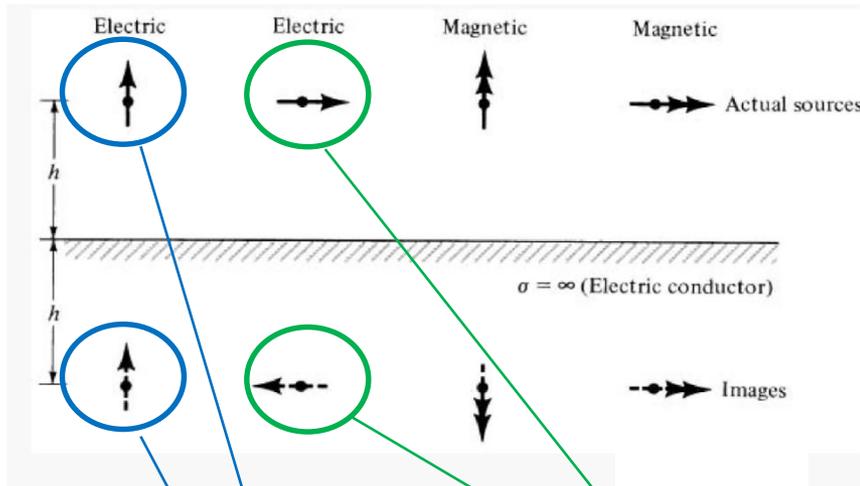
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

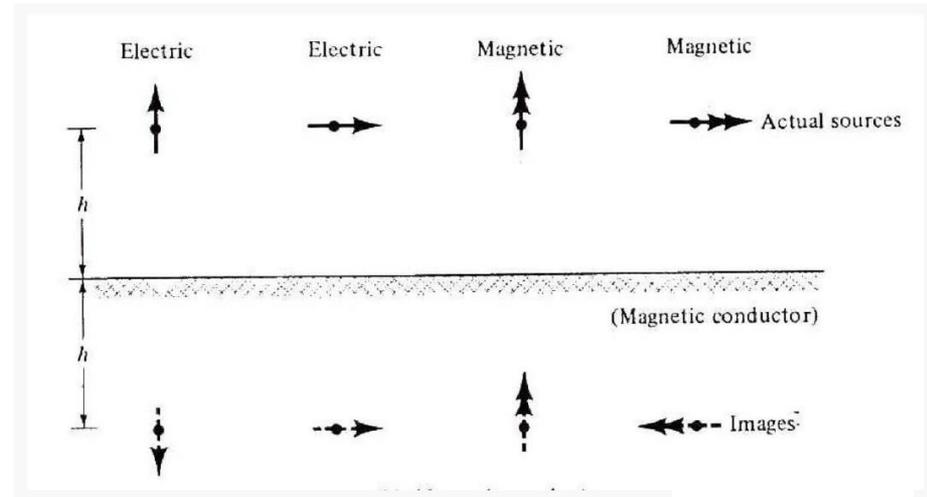
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Antenas de hilo en proximidad de planos conductores

## Conductor eléctrico perfecto



## Conductor "magnético" perfecto



Pol. Vertical  
Fuente de campo E  
No cambia

Pol. Horizontal  
Fuente de campo E  
Si cambia

Dualidad en  
electromagnetismo

Cartagena99

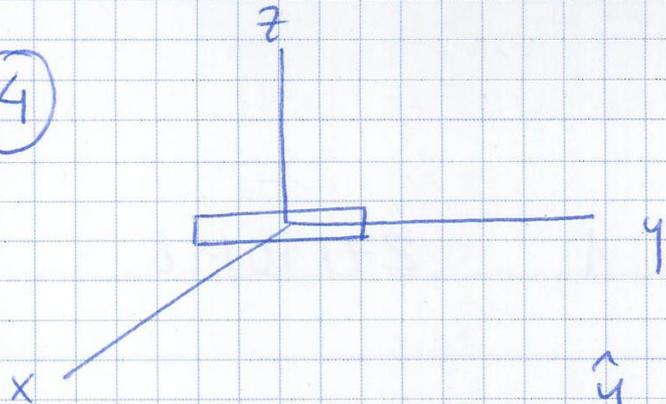
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Dipolo infinitesimal (eje y): Ejemplos 1

Obtenga los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  radiados por un dipolo infinitesimal orientado según el eje  $\hat{y}$  y colocado en el origen.

(4)



$$\vec{I} = I_0 \hat{y}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} I_0 \hat{y} \frac{e^{-jkz}}{r} dz$$

$$\hat{y} = \hat{\theta} \cos \theta \sin \phi + \hat{\phi} \cos \phi$$

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} = -j\omega \frac{\mu_0 L I_0}{4\pi} \frac{e^{-jkz}}{r} [\cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}] \text{ V/m.}$$

$$\vec{H}_{rad} = \frac{\hat{z} \times \vec{E}}{r_0}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{z} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & E_\theta & E_\phi \end{vmatrix} = -E_\phi \hat{\theta} + E_\theta \hat{\phi}$$

$$\vec{H}_{rad} = \frac{1}{r_0} \frac{\mu_0 L I_0}{4\pi} \frac{e^{-jkz}}{r} [\cos \phi \hat{\theta} - \cos \theta \sin \phi \hat{\phi}] A$$

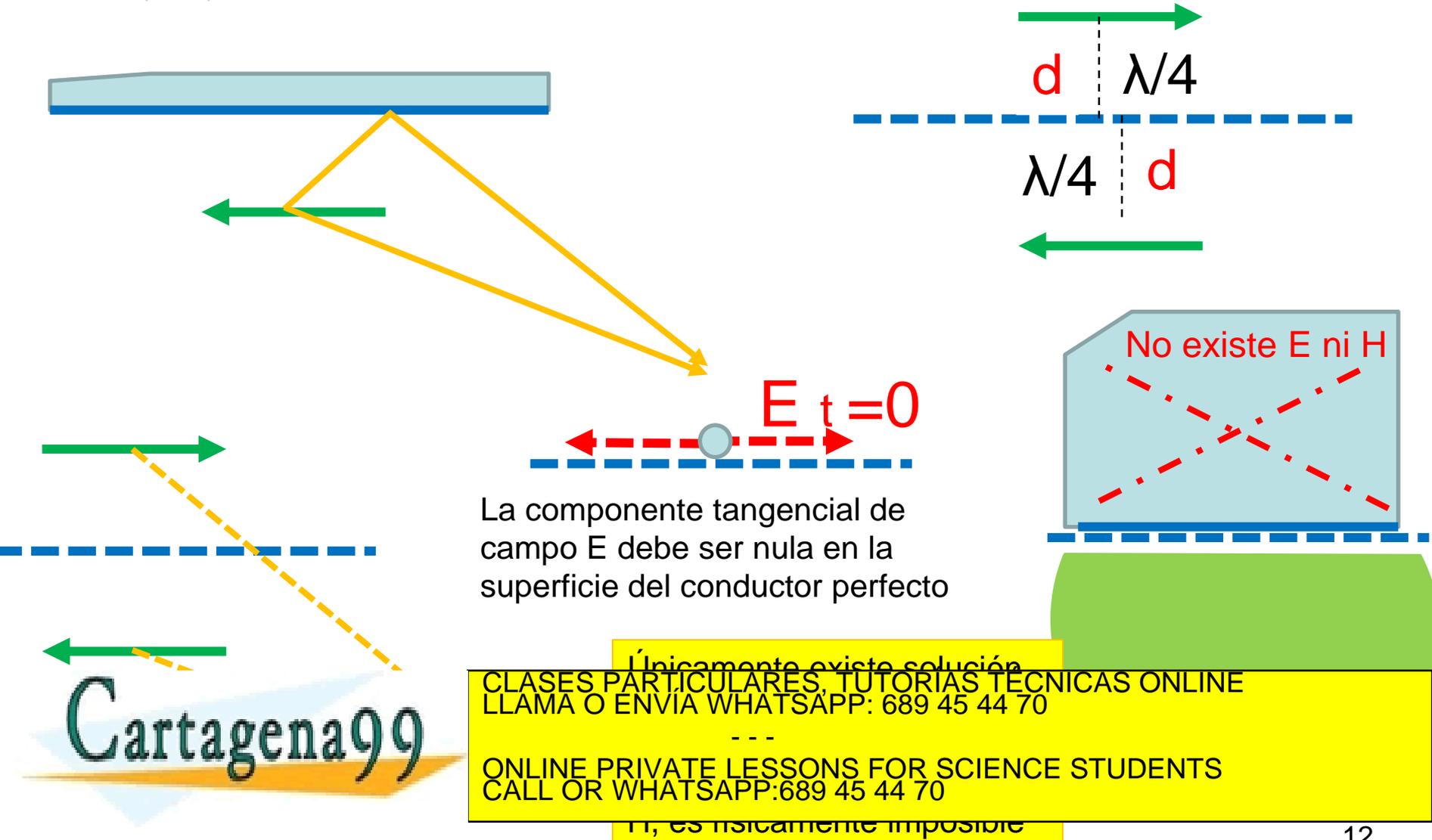
**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Teoría de imágenes: Ejemplo 1 (cuestión 5 prueba 1, 2016)

Suponga ahora que a una distancia  $\lambda/4$  en vertical por encima del dipolo de la cuestión anterior se coloca un plano conductor perfecto (según XY). Obtenga, de manera razonada, el campo  $\vec{E}$  radiado por el conjunto en este caso. (1pto)



# Teoría de imágenes: Ejemplo 1 (cuestión 5 prueba 1, 2016)

Suponga ahora que a una distancia  $\lambda/4$  en vertical por encima del dipolo de la cuestión anterior se coloca un plano conductor perfecto (según XY). Obtenga, de manera razonada, el campo  $\vec{E}$  radiado por el conjunto en este caso. (1pto)

5

Tª Imágenes

$\Rightarrow$

$\vec{r}_2 = \frac{\lambda}{4} \hat{z}$

$\vec{r}_1 = \frac{\lambda}{4} (-\hat{z})$

$$FA = e^{+jk\vec{r}_1 \cdot \hat{i}} - e^{jk\vec{r}_2 \cdot \hat{i}}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} \hat{z} \cdot \hat{i}} - e^{jk\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} \hat{z} \cdot \hat{i}}$$

$$= e^{-j\frac{\pi}{2} \cos\theta} - e^{j\frac{\pi}{2} \cos\theta} = 2j \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)$$

**Cartagena99**

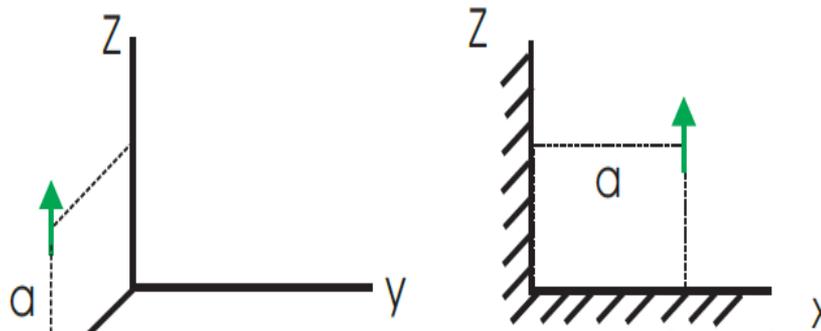
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Teoría de imágenes: Ejemplo 2 (examen final enero de 2016)

1] Considere un dipolo corto vertical situado en la posición  $P(a, 0, a)$  tal y como indica la figura inferior. Dicho dipolo se encuentra en las proximidades de dos planos conductores perfectos (plano XY y plano ZY) que forman una escuadra de conductor eléctrico perfecto.

- Obtenga el campo radiado por la configuración propuesta. Razone con detalle el procedimiento utilizado para obtenerlo y exprese el resultado de manera lo más compacta posible (1.5 puntos).
- Obtenga el diagrama de radiación del conjunto, dipolo y planos conductores, tomando  $a = \lambda/4$  y representélo de forma aproximada en el plano  $\phi = 0^\circ$  (0.5 puntos).

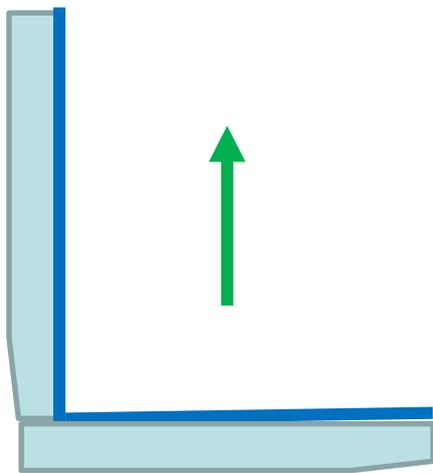


Cartagena99

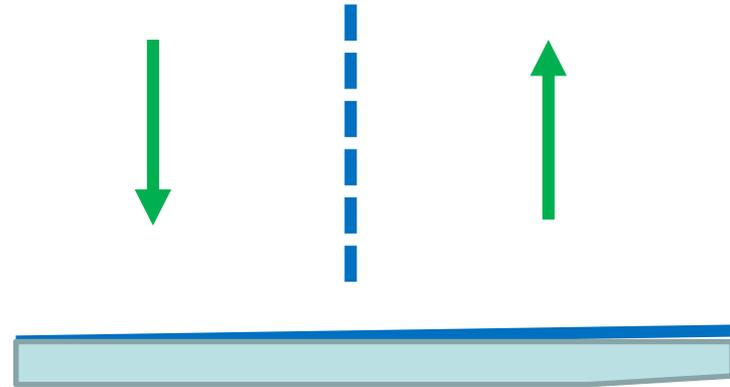
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Paso 1

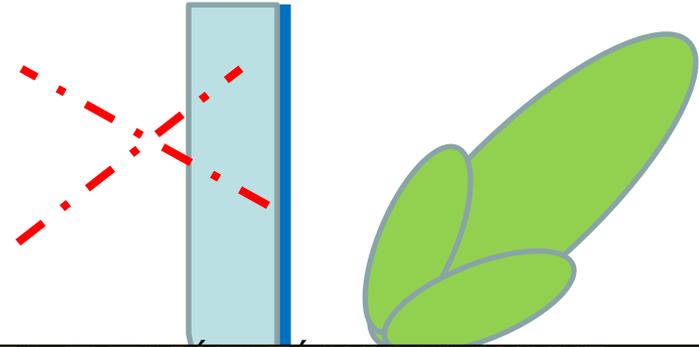


En cada paso se elimina un plano conductor y se sustituye por las fuentes imagen que producen las condiciones de contorno adecuadas

Paso 2



E y H sólo en el primer cuadrante



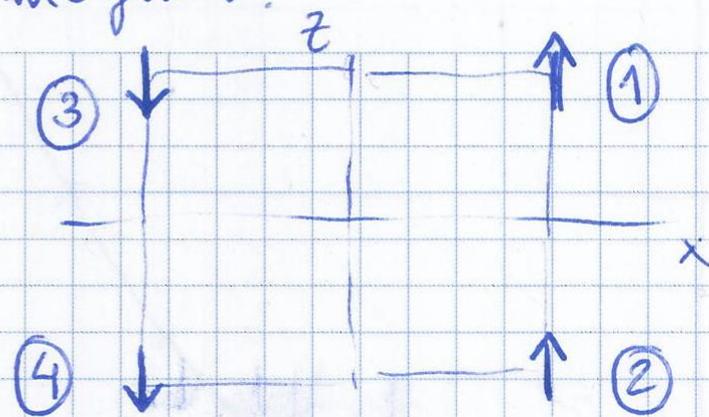
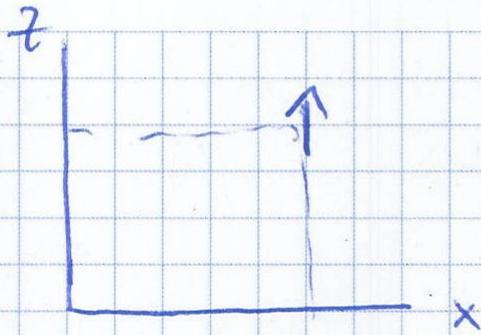
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

7ª Imágenes.



$$\bar{r}_1 = a(\hat{x} + \hat{z})$$

$$\bar{r}_2 = a(\hat{x} - \hat{z})$$

$$\bar{r}_3 = a(-\hat{x} + \hat{z})$$

$$\bar{r}_4 = a(-\hat{x} - \hat{z})$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transmisión y Propagación. Gra. Ing. Comunicaciones Mov. y Esp. Curso 20/21

16

$$\bar{E}_{total} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \bar{E}_4$$

$$E(r, \theta, \phi) = C \sin \theta \frac{e^{-jkz}}{r} \hat{\theta}$$

$$\left[ e^{jk\bar{r}_1 \cdot \hat{z}} + e^{jk\bar{r}_2 \cdot \hat{z}} - e^{jk\bar{r}_3 \cdot \hat{z}} - e^{jk\bar{r}_4 \cdot \hat{z}} \right] =$$

$$(\bar{x} \cdot \hat{z} = \sin \theta \cos \phi \quad \bar{z} \cdot \hat{z} = \cos \theta)$$

$$e^{jka}(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta) + e^{jka}(\sin \theta \cos \phi - \cos \theta)$$

$$- e^{jka}(-\sin \theta \cos \phi + \cos \theta) - e^{jka}(-\sin \theta \cos \phi - \cos \theta) =$$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\begin{aligned}
 & e^{jka \sin \theta \cos \phi} e^{jka \cos \theta} + e^{jka \sin \theta \cos \phi} e^{-jka \cos \theta} \\
 - & e^{-jka \sin \theta \cos \phi} e^{jka \cos \theta} - e^{-jka \sin \theta \cos \phi} e^{-jka \cos \theta} =
 \end{aligned}$$

$$e^{jka \sin \theta \cos \phi} 2 \cos(ka \cos \theta) - e^{-jka \sin \theta \cos \phi} 2 \cos(ka \cos \theta) =$$

$$2j \sin(ka \sin \theta \cos \phi) \cdot 2 \cos(ka \cos \theta)$$

$$\vec{E} = c e^{-jkr} \hat{\theta} (4j \sin(ka \sin \theta \cos \phi) \cdot \cos(ka \cos \theta)) \sin \theta$$

### Campo total radiado por los cuatro elementos

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

**Cartagena99**

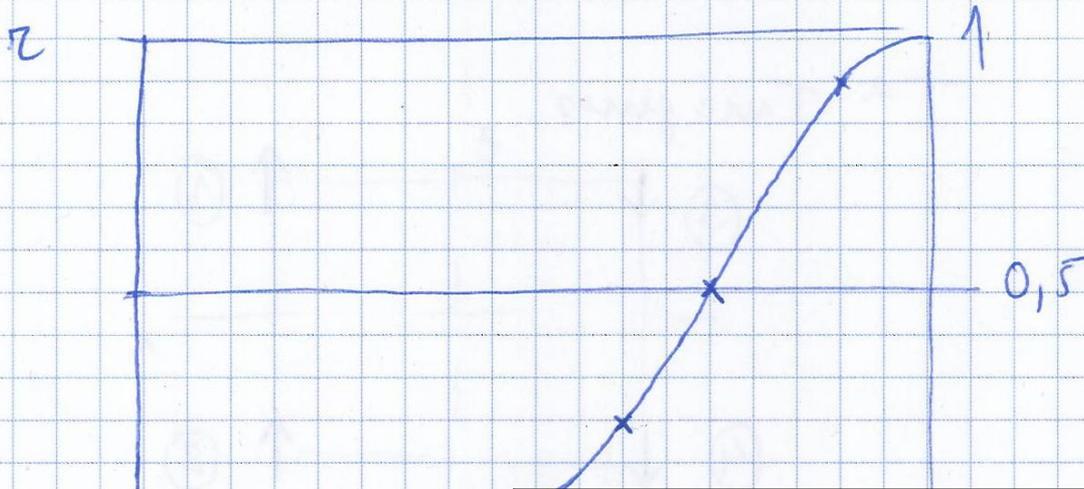
$$\phi = 0$$

$$\cos \phi$$

$$b) \quad r(\theta) = \sin^2 \theta \sin^2 (ka \sin \theta) \cos^2 (ka \cos \theta)$$

Diagrama de radiación

$$= \sin^2 \theta \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \sin \theta \right) \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$



$$100\% \quad 0 \leq \theta \leq 90^\circ$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70