

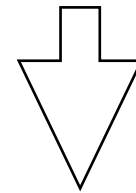
modelado matemático de un sistema físico mediante función de transferencia

sistema de traslación:

$$\sum_i F_i = M\ddot{x}$$

sistema de rotación: ← aplicar las leyes de la física

$$\sum_i M_i = I\ddot{\theta}$$



sistema eléctrico...

sistema electromecánico...

ecuación diferencial que relaciona input/output

funciones de transferencia

de sistema eléctrico,

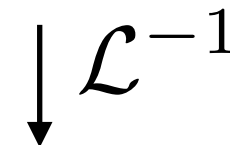
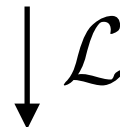
sistema mecánico,

sistema electromecánico, etc

son matemáticamente

indistinguibles

← función de transferencia

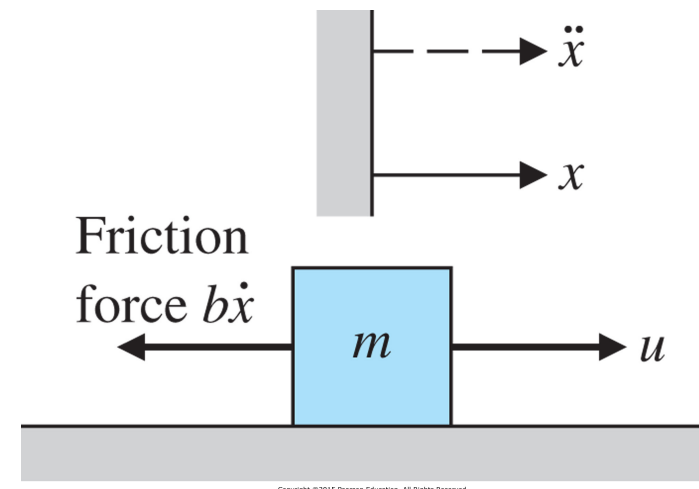
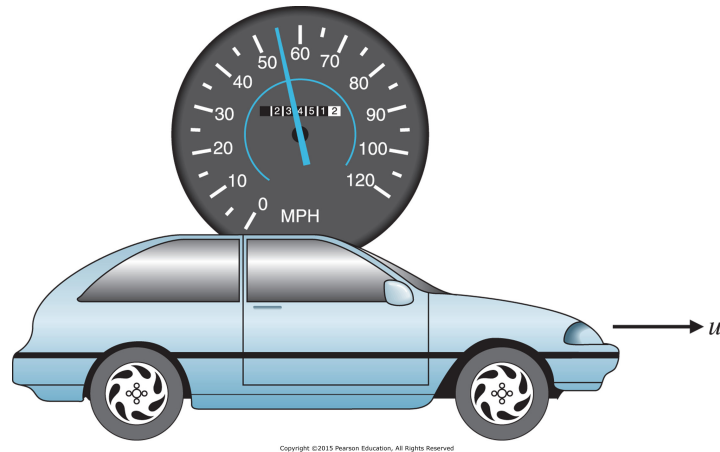


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Ejemplo: modelado matemático de sistema de control de velocidad (sistema mecánico de traslación)



ecuaciones del movimiento:

$$u - b\dot{x} = m\ddot{x} \longrightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} = \frac{u}{m}$$

en función de la velocidad:

$$\dot{v} + \frac{b}{m}v = \frac{u}{m} \quad (1)$$
$$v = \dot{x}$$

aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial (1):

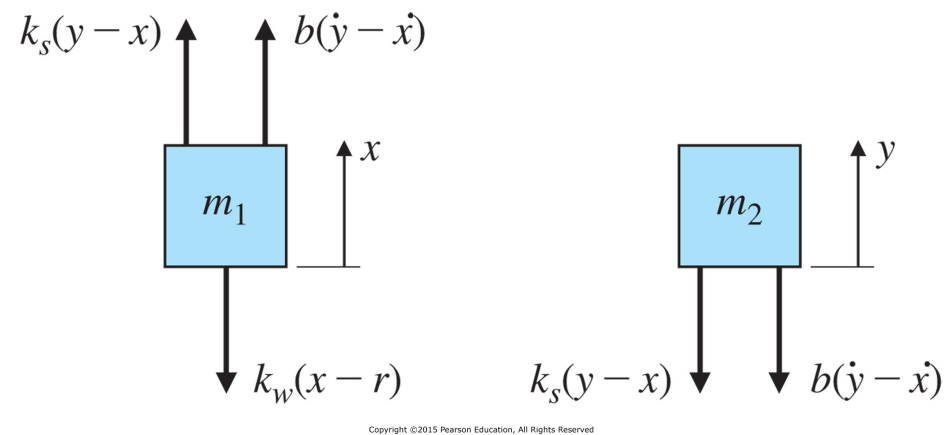
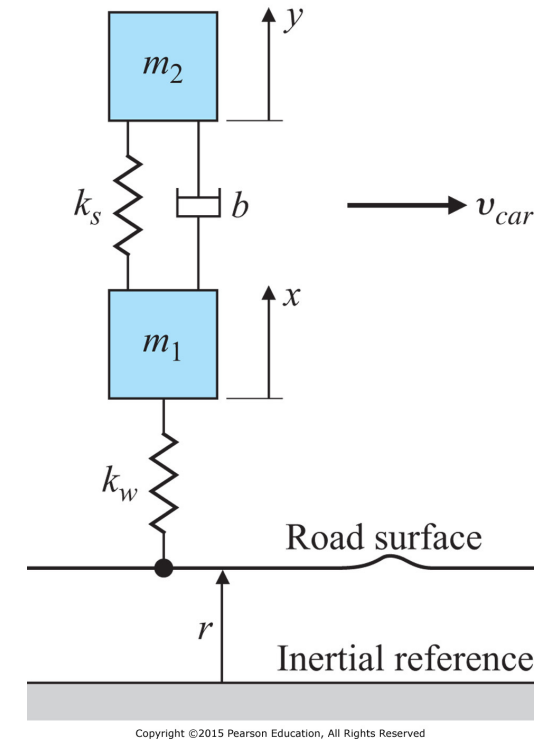
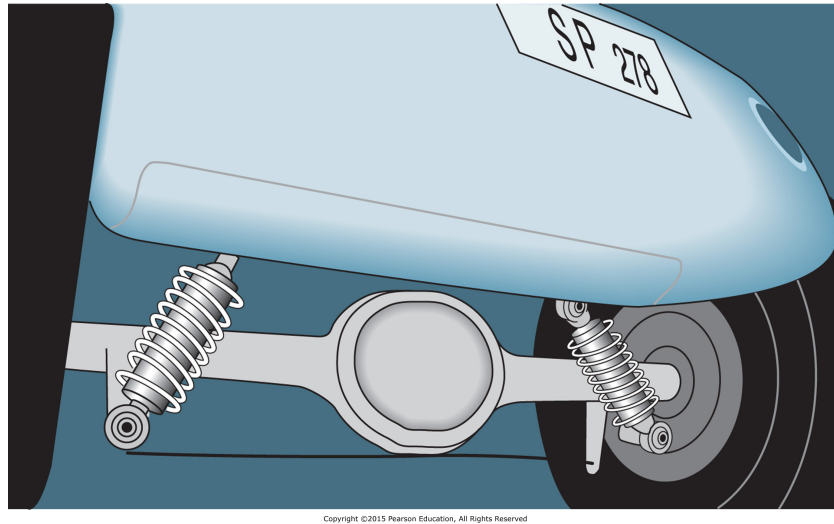
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplo: modelado simplificado de sistema de suspensión

(sistema mecánico de traslación)



(ecuaciones no independientes)

$$b(\dot{y} - \dot{x}) + k_s(y - x) - k_w(x - r) = m_1 \ddot{x}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\ddot{x} + \frac{b}{m_1}(\dot{x} - \dot{y}) + \frac{k_s}{m_1}(x - y) + \frac{k_w}{m_1}x = \frac{k_w}{m_1}r$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m_2}(\dot{y} - \dot{x}) + \frac{k_s}{m_2}(y - x) = 0$$

transformada de Laplace de la ec. diferencial para obtener función de transferencia:

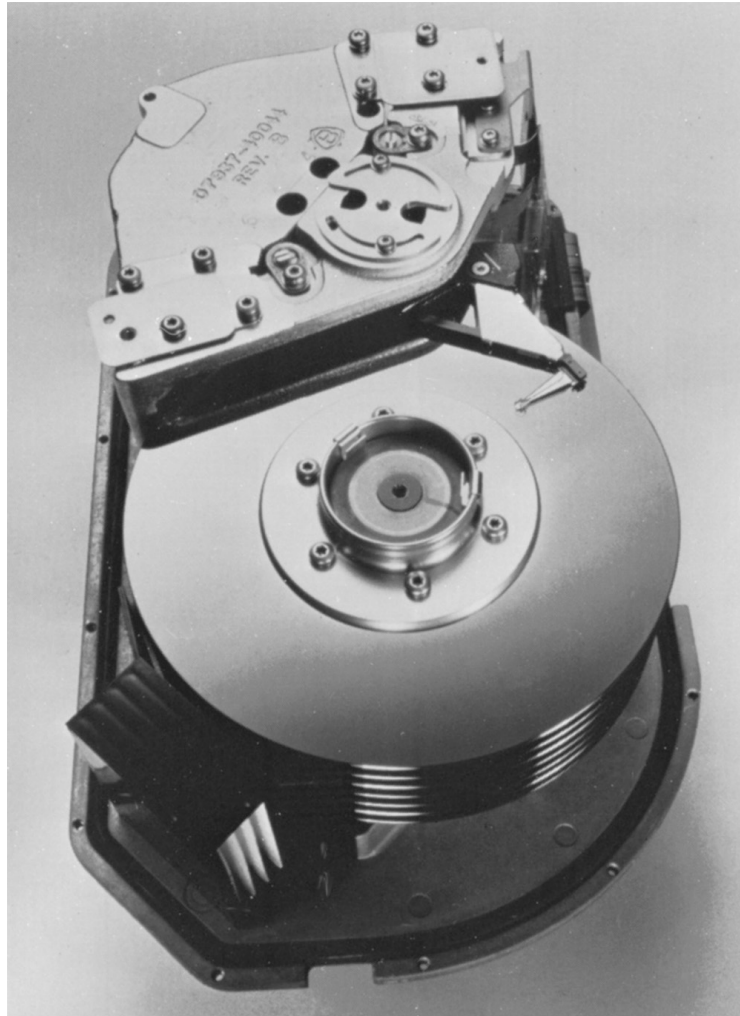
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_w b}{m_1 m_2} \left(s + \frac{k_s}{b} \right)}{s^4 + \left(\frac{b}{m_1} + \frac{b}{m_2} \right) s^3 + \left(\frac{k_s}{m_1} + \frac{k_s}{m_2} + \frac{k_w}{m_1} \right) s^2 + \left(\frac{k_w b}{m_1 m_2} \right) s + \frac{k_w k_s}{m_1 m_2}}$$



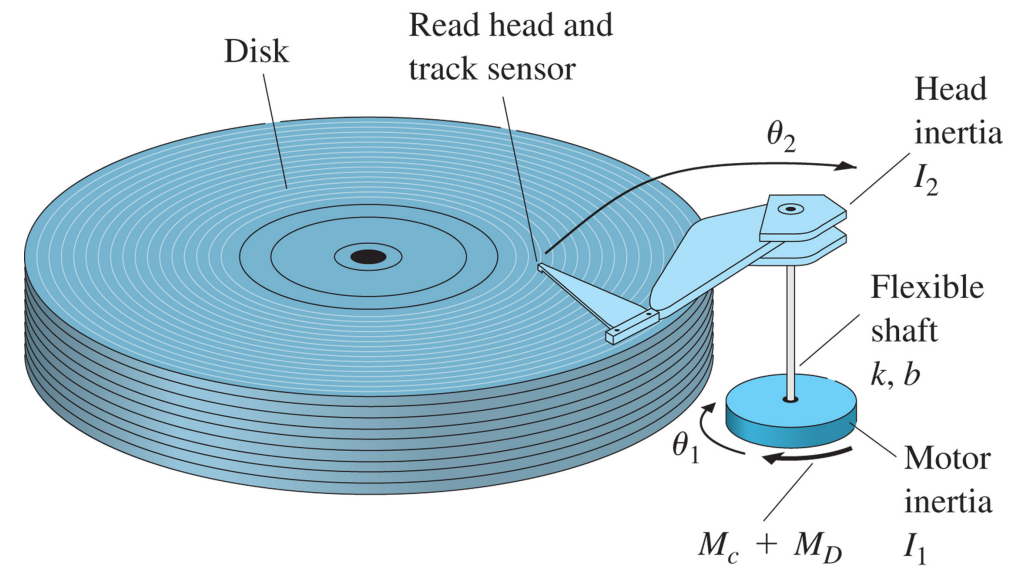
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

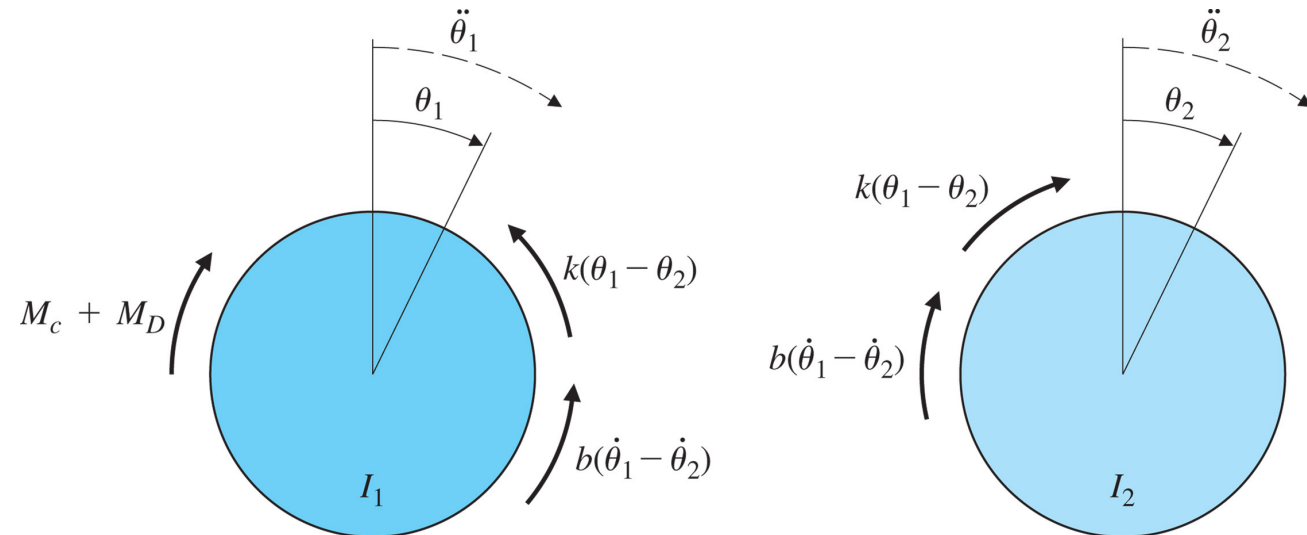
Ejemplo: modelado matemático de sistema de lectura/escritura de disco (sistema mecánico de rotación)



Copyright ©2015 Pearson Education, All Rights Reserved



Copyright ©2015 Pearson Education, All Rights Reserved



Copyright ©2015 Pearson Education, All Rights Reserved

función de transferencia que relaciona posición angular con torque aplicado:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

modelado matemático

Ejemplo: modelado matemático de sistema eléctrico

ejercicio #1 de hoja de problemas #2

obtenemos la función de transferencia del circuito que estudiamos previamente en hoja de problemas #1 mediante su ecuación diferencial



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

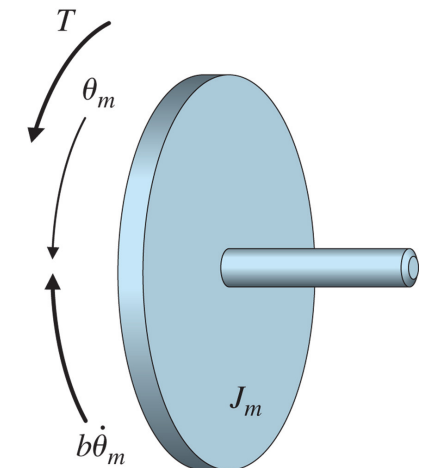
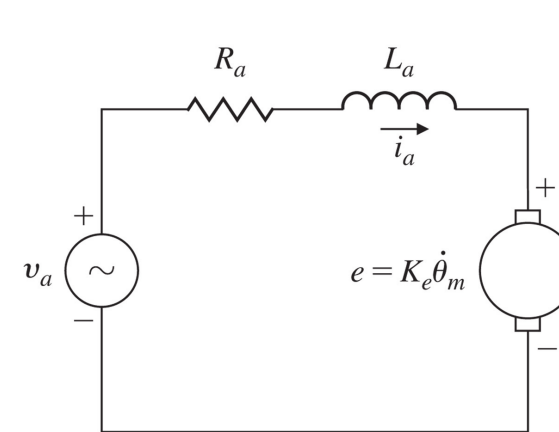
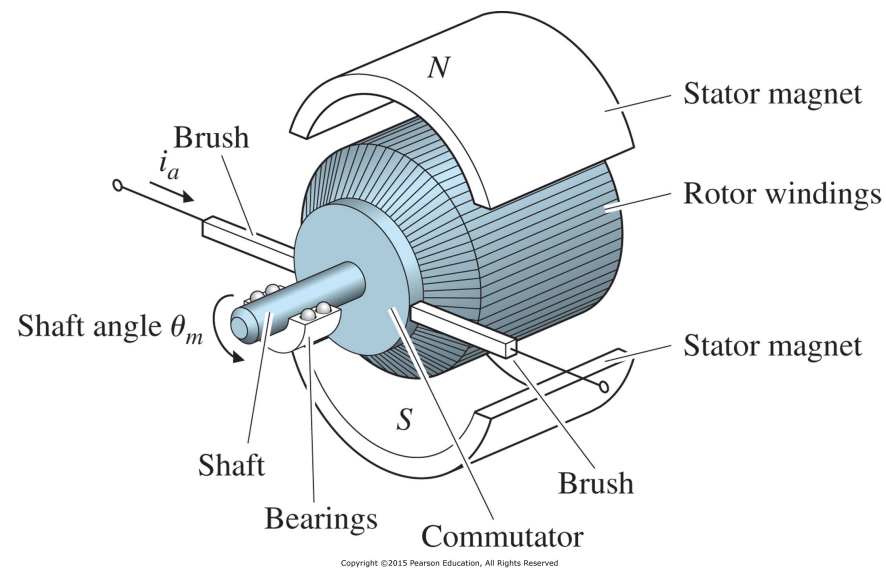
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplo: motor DC

sistema electromecánico:

input: eléctrico

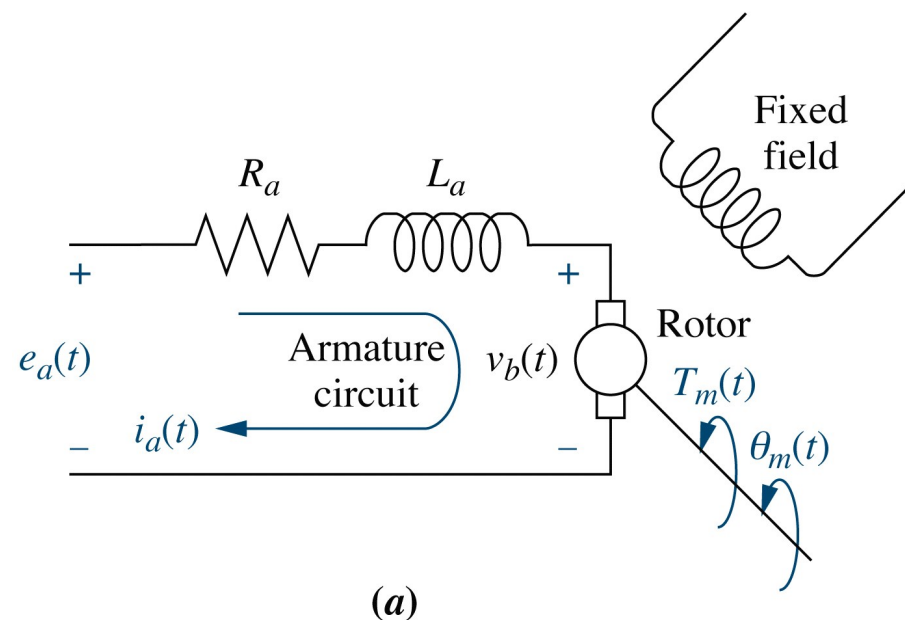
output: mecánico (rotación)



(a)

(b)

Copyright ©2015 Pearson Education, All Rights Reserved



(a)

torque sobre el motor (T)
en función de la corriente (i_a):

$$T = K_t i_a$$

voltaje generado en el conductor que rota en un campo
magnético (proporcional a su velocidad angular):

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

análisis del torque resultante sobre el rotor:

$$J_m \ddot{\theta}_m + b \dot{\theta}_m = K_t i_a \quad (1)$$

análisis del circuito eléctrico:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - K_e \dot{\theta}_m \quad (2)$$

Función de transferencia:

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_t}{s[(J_m s + b)(L_a s + R_a) + K_t K_e]}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Si L_a es despreciable frente a R_a (caso habitual), a partir de (1) y (2):

$$J_m \ddot{\theta}_m + \left(b + \frac{K_t K_e}{R_a}\right) \dot{\theta}_m = \frac{K_t}{R_a} v_a$$

y la función de transferencia:

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\frac{K_t}{R_a}}{J_m s^2 + \left(b + \frac{K_t K_e}{R_a}\right) s} = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

donde:

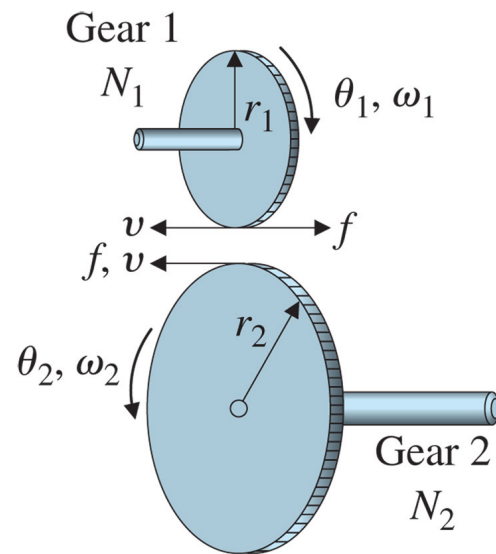
$$K = \frac{K_t}{R_a} \quad \tau = \frac{R_a J_m}{b + \frac{K_t K_e}{R_a}}$$

Cartagena99

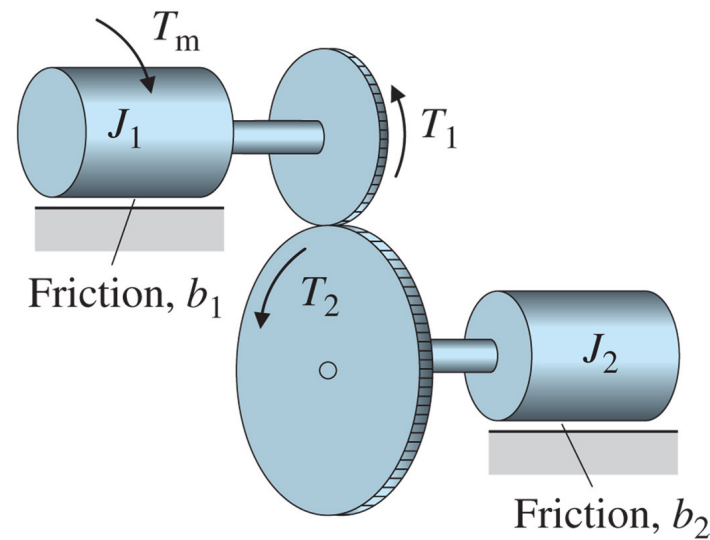
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

en la mayoría de las ocasiones un motor en un sistema de control se utiliza asociado a engranajes



(a)



(b)

Copyright ©2015 Pearson Education, All Rights Reserved

relaciones geométricas que cambian el factor de escala del torque y la velocidad respecto a la del motor:

$$\frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2} = f = \text{fuerza aplicada} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{N_2}{N_1} \rightarrow T_2 = T_1 \frac{N_2}{N_1}$$

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = v \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

ω_2 ω_2 ω_1

ω_1

Imaginamos un motor cuyo torque T_m (output) se aplica sobre el engranaje 1 que encaja con el engranaje 2

Buscamos la función de transferencia entre la posición angular del engranaje 2 y el torque del motor, es decir: $\frac{\Theta_2(s)}{T_m(s)}$

el ángulo θ_2 describe la posición del engranaje 2

La inercia del engranaje 1 y todo lo que está conectado a él es J_1

La inercia del engranaje 2 y todo lo que está conectado a él es J_2

Ecuación de movimiento para 1: $J_1\ddot{\theta}_1 + b_1\dot{\theta}_1 = T_m - T_1$

Ecuación de movimiento para 2: $J_2\ddot{\theta}_2 + b_2\dot{\theta}_2 = T_2$

T_1 es el torque que el engranaje 2 aplica sobre el 1

T_2 es el torque que el engranaje 1 aplica sobre el 2

¡estas dos ecuaciones no son independientes!

sustituyendo en esas ecuaciones las relaciones anteriores: $T_2 = T_1 \frac{N_2}{N_1}$ $\theta_1 = \theta_2 \frac{N_2}{N_1}$

y eliminando T_1

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\left(J_2 + J_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\right) \ddot{\theta}_2 + \left(b_2 + b_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\right) \dot{\theta}_2 = \frac{N_2}{N_1} T_m$$

función de transferencia:

$$\frac{\Theta_2(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{N_2}{N_1}}{J_{eq} s^2 + b_{eq} s}$$

donde,

$$J_{eq} = J_2 + J_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

$$b_{eq} = b_2 + b_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70