Problema 1. Calcular el resto de dividir :
(a) 1986^{2061} por 7, (b) 1654^{1255} por 23, (c) 293^{1767} por 7, (d) 6^{2000} por 11
(e) $(1843)^{138648568243871569}$ por 11

Problema 2. Hallar las dos últimas cifras de 7^{5448}.

Problema 3. Demuestra que 1241es un divisor de $8^{72} - 1$

Problema 4. Sea p un número primo impar, Demuestra que sólo son inversos de sí mismos en $\mathbb{Z}_p$ $\overline{1}$ y $\overline{p-1}$.

Problema 5. Encontrar el menor resto no negativo de 1! + 2! + 3!+… + 10! módulo cada uno de los siguientes enteros a) 3, b) 11, c) 4, d) 23

Problema 6. Encontrar el menor resto no negativo de 1! + 2! + 3!+… + 100! módulo cada uno de los siguientes enteros a) 2, b) 7, c) 12, d) 25

Problema 7. Encontrar el menor resto no negativo de:
6! Módulo 7, (b) 10! Módulo 11, (c) 12! Modulo 13, (d) 16! Modulo 17.

Problema 8. Demuestra que:
(a) 437 es divisor de 18! +1, (b) 11 es divisor de 10! +1

Problema 9. Encontrar los restos de la división euclídea en los siguientes casos:
(a) 16! dividido por 19, (b) 5!25! dividido por 31, (c) 8*9*10*11*12 por 7
(d) 8*9*10*11*12*13 por 7 (e) $3^{999999999}$ dividido por 17

Problema 10. Encuentra el resto de dividir 40! por 1763.

Problema 11. Demostrar que $3^{10} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11^2)$

Problema 12. Se considera la expansión en base 7 de 3^{100}:
(a) Encuentra el último dígito, (b) Encuentra los dos últimos dígitos.

Problema 13. Demuestra que si p es un número primo impar, se verifica

$$2(p-3)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p)$$

Problema 14. Demuestra que si n es un entero compuesto con n ≠ 4, se verifica que

$$(n-1)! \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ n)$$

Problema 15. Demuestra que a^{12}-1 es divisible por 35 si $mcd(a, 35) = 1$

$$1^p + 2^p + 3^p + \ldots + (p-1)^p \equiv 0\ (mod\ p)$$

Problema 20. Demuestra que si p es número primo y, a y b son enteros no divisibles por p, con $a^p \equiv b^p$ (mod p), se verifica $a^p \equiv b^p$ (mod p^2).

Problema 21. Demostrar que si p y q son dos primos distintos, se verifica que

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \text{ (mod } pq)$$

Problema 22. Demuestra que si p es primo y $p \equiv 3$ (mod 4), se verifica que

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \pm 1 (mod\ p)$$

Problema 23. Encontrar los inversos de los números dados en los cuerpos que se indican:

(a) 3, 5, 8 en $\mathbb{Z}_{13}$, (b) 3, 6, 9, 10 en $\mathbb{Z}_{11}$, (c) 3, 4, 2 , en $\mathbb{Z}_5$, (d) 3, 11, 15, 22 en $\mathbb{Z}_{23}$.

Problema 24. Resolver los siguientes sistemas de congruencia:

(a) $\begin{cases} x + 2y + 3z \equiv 1 (mod\ 7) \\ x + 2y + 4z \equiv 1 (mod\ 7) \\ x + 4y + 6z \equiv 1 (mod\ 7) \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 3x + y + 3z \equiv 1 (mod\ 5) \\ x + 2y + 4z \equiv 2 (mod\ 5) \\ 4x + 3y + 2z \equiv 3 (mod\ 5) \end{cases}$,

(c) $\begin{cases} x + 2y + 3z \equiv 1 (mod\ 7) \\ x + 2y + 5z \equiv 1 (mod\ 7) \\ x + 4y + 6z \equiv 1 (mod\ 7) \end{cases}$, (d) $\begin{cases} x + 2y + 3z \equiv 1 (mod\ 11) \\ x + 2y + 5z \equiv 1 (mod\ 11) \\ x + 4y + 6z \equiv 1 (mod\ 11) \end{cases}$,

(e) $\begin{cases} 3x + y + 3z \equiv 1 (mod\ 7) \\ x + 2y + 4z \equiv 2 (mod\ 7) \\ 4x + 3y + 2z \equiv 3 (mod\ 7) \end{cases}$, (f) $\begin{cases} 3x + y + 3z \equiv 1 (mod 13) \\ x + 2y + 4z \equiv 2 (mod\ 13) \\ 4x + 3y + 2z \equiv 3 (mod\ 13) \end{cases}$

Problema 25. (*Residuos cuadráticos*) Un entero a se dice residuo cuadrático módulo n si $mcd(a, n) = 1$ y la ecuación

$$x^2 \equiv a \text{ (mod } n)$$

posee solución. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}_{11}$, los residuos cuadráticos son 1, 3, 4, 5 y 9.
Sea n = 4, p^k, $2p^k$ (p primo impar). Demostrar que a es residuo cuadrático si, y sólo si, $a^{\frac{\varphi(n)}{2}} \equiv 1 (mod\ n)$

Problema 26. Sea p un primo impar y $mcd(a, p) = 1$. Demostrar que a es residuo cuadrático módulo p si $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (mod\ p)$ y que a no es residuo cuadrático módulo p si $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 (mod\ p)$

Problema 27. Sea p un primo impar y $mcd(a, p) = 1$. Demostrar que la ecuación $x^2 = a$