Mat II (GIB) - 7/6/2016 Prueba 2 (EC). 45 puntos (= 45 % NOTA FINAL)

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 135 minutos**

TEST. (10 puntos) Tiempo 30 minutos

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo una opción por pregunta. **Puntuación:** Correcto +2.0 **Error -0.5** En blanco 0.

---

1. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real. Entonces,

[x] a) Si $\{a_n\}$ es acotada, entonces contiene una subsucesión convergente.
[ ] b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, entonces, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.
[ ] c) ni a) ni b)

2. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = L \in \mathbb{R}$. Entonces,

[x] a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2^n} = L$
[ ] b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$
[ ] c) ni a) ni b)

3. Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie divergente de términos positivos. Entonces, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5a_n}{3+(a_n)^2}$ es

[ ] a) siempre divergente
[ ] b) siempre convergente
[x] c) ni a) ni b)

4. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \in \mathbb{R}$. Entonces,

[ ] a) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge
[x] b) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
[ ] c) ni a) ni b)

5. Si el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y)$ en $(-2,0)$ es $P_2(x,y) = 2+2(x+2)+(x+2)y-3y^2$, entonces el gradiente de f en $(-2,0)$ es igual a

[ ] a) $(-2,0)$
[ ] b) $(0,-3)$
[x] c) $(2,0)$

Mat II (GIB) - 7/6/2016 **Prueba 2 (EC) Problema 1. (10 puntos)**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 45 minutos**

Por favor, comience su respuesta en esta hoja. Justifique su respuestas.

a) **(5 puntos)** Demuestre que una serie geométrica de razón $q \in \mathbb{R}$ converge si y sólo si $|q| < 1$.

b) **(5 puntos)** Sea $\alpha \in A := [0, 2\pi]$ y considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}^n(\alpha).$$

Estudie para qué valores de $\alpha \in A$ converge la serie dada y para estos valores, súmela.

SOLUCIÓN:

a) Consideremos la suma finita $S_k := 1 + q + q^2 + \cdots + q^k,\ k \in \mathbb{N}$. Entonces es claro que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^k - q(1 + q + q^2 + \cdots + q^k) = 1 - q^{k+1},$$

por lo que la suma buscada, S_k, verifica la ecuación $S_k - qS_k = 1 - q^{k+1}$. Si $q \neq 1$ entonces

$$S_k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Si $q = 1$ entonces, obviamente,$S_k = k + 1$.

Consideremos ahora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Es claro que la condición necesaria de convergencia sólo se cumple si $|q| < 1$, por lo que para $|q| \geq 1$ la serie no converge. Por otro lado, para $|q| < 1$, estudiemos la serie. Su suma parcial k-ésima es justamente la S_k calculada anteriormente, por lo que hemos de estudiar el límite $\lim_{k\to\infty} S_k$. Es claro que si $|q| < 1$ entonces $S_k \to \frac{1}{1-q}$, cuando $k \to \infty$. En conclusión, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge si y sólo si $|q| < 1$ y lo hace al valor $\frac{1}{1-q}$.

b) Observemos primero que cualquier serie geométrica del tipo $\sum_{n=K}^{\infty} q^n$,con $K \in \mathbb{N}$ y $K > 0$, tiene el mismo carácter de convergencia que la serie "patrón", que comienza en $n = 0$ ya que difieren en una cantidad finita $\sum_{n=0}^{K-1} q^n$. También puede observarse que sus sumas parciales son proporcionales, ya que podemos escribirlas como:

$$S_j = q^K + q^{K+1} + \cdots + q^{K+j} = q^K(1 + q + \cdots + q^j).$$

Puesto que la serie dada es de este tipo, con razón $q = \mathrm{tg}\,\alpha$, basta con plantear la condición necesaria y suficiente para su convergencia: $|q| < 1$, es decir, $|\mathrm{tg}\,\alpha| < 1$, que se cumple solamente si $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$, ya que ha de ser $\alpha \in A$.

También podríamos haber llegado a la misma conclusión empleando, por ejemplo, el criterio raíz de Cauchy para estudiar la convergencia absoluta y mostrar que fuera de este conjunto de valores de α la serie no verifica la condición necesaria de convergencia.

Su suma, para los valores de α hallados anteriormente es :

$$S = \frac{1}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha} - 1 = \mathrm{tg}\,\alpha \frac{1}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha},$$

puesto que la serie dada comienza con el término correspondiente a $n = 1$.

Mat II (GIB) - 7/6/2016 **Prueba 2 (EC) Problema 2. (20 puntos)**

Apellidos .... *Nombre* ....
DNI .... *Grupo* .... **Tiempo 60 minutos**

Por favor, comience su respuesta en esta hoja. Justifique su respuestas.

1. **(5 puntos)** Sean $h, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que tienen límite H, G en $p = (a, b) \in \mathbb{R}$, respectivamente. Pruebe que entonces la función $h + g$ tiene límite $H + G$ en p.

2. Sea ahora la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) **(5 puntos)** Estudie su continuidad y diferenciabilidad.

   b) **(5 puntos)** Halle sus puntos críticos y clasifíquelos.

   c) **(5 puntos)** Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el semicírculo superior del círculo unidad. Razone por qué f es integrable en A y halle $\int_A f(x,y)\, dA$.

SOLUCIÓN:

1. Puesto que h y g tienen límite en $p \in \mathbb{R}^2$, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existen sendas $\mathring{B}(p;\alpha)$, $\mathring{B}(p;\beta)$, bolas perforadas de p tales que si $(x,y) \in \mathring{B}(p;\alpha) \Rightarrow |h(x,y) - F| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $(x,y) \in \mathring{B}(p;\beta) \Rightarrow |g(x,y) - G| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea ahora $\delta := \min\{\alpha, \beta\}$. Entonces, si $(x,y) \in \mathring{B}(p;\delta)$ se tendrá que

$$|(h+g)(x,y) - (H+G)| = |h(x,y) - H + g(x,y) - G| \leq |h(x,y) - H| + |g(x,y) - G| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2.

   a) En cualquier punto $(x,y) \neq (0,0)$, la función f dada es suma, producto y cociente de funciones diferenciables en sus dominios de definición, que es $\mathbb{R}^2$, por lo que f también es diferenciable, y por tanto, continua.
   Puesto que $|xy| \leq (x^2 + y^2)$, tendremos que

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0, \quad (x,y) \to (0,0).$$

   Por tanto $f(x,y) \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,0)$, y la función dada es continua en el origen. Que no es diferenciable en este punto puede verse fácilmente estudiando las derivadas direccionales. Aquí, sin embargo emplearemos una forma equivalente de la definición, esto es, $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$ si y sólo si

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \to 0, \quad (x,y) \to (0,0).$$

   Calculemos las parciales en $(0,0)$. Hemos de emplear directamente la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)}{h} = 0.$$

   Análogamente se obtiene $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Por tanto, según la condición de más arriba, f será diferenciable en el origen si y solo si la expresión

$$\frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

   tiene límite cero, cuando (x,y) tiende a $(0,0)$. Pero ésta no tiene límite en $(0,0)$, como puede verse fácilmente pasando a coordenadas polares. Por tanto, f no es diferenciable en el origen.

b) La matriz Jacobiana para $(x, y) \neq (0, 0)$ viene dada por:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}.$$

Los puntos críticos son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \\ \\ \dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \end{cases}$$

que obviamente no tiene solución bajo la condición $(x, y) \neq (0, 0)$. Por tanto, el único punto crítico es el origen. Así, al ser f diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, que es un abierto, ninguno de estos puntos puede ser un extremo.
Como la función f no es diferenciable en el origen, no podemos usar el polinomio de Taylor, y por tanto tampoco la matriz Hessiana para estudiar su carácter. Sin embargo, estudiando la función en las proximidades de $(0, 0)$, es fácil ver que hay puntos tan próximos a él como se desee y tales que la función se hace tanto positiva como negativa. Basta con tomar $(x, y) \in B((0, 0); \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, y tales que, en un caso $xy > 0$ mientras que en otro sea $xy < 0$.
Por tanto en el origen tampoco hay un extremo local. A la sazón, notemos también que, como era de esperar, las parciales no son continuas en el origen, ya que la función no es diferenciable ahí.

c) El conjunto A del enunciado puede describirse analíticamente de la siguiente forma:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1] \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\}.$$

Así, podemos definir en el cuadrado $C := [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ la función auxiliar

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si} \quad (x, y) \in A, \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) \notin A \end{cases}$$

Observemos que F es integrable en C ya que f es continua en el compacto A, y por tanto acotada, y por tanto F tambien lo es y el conjunto de sus discontinuidades es a lo sumo la frontera de A, es decir, el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1] \wedge y = 0\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1] \wedge y(x) = \sqrt{1 - x^2}\right\}$ que es la unión de una cantidad finita (dos) de gráficas de funciones continuas. Por ello, $\displaystyle\int_C F(x, y)\, dC = \int_A f(x, y)\, dA$.
Observemos que la integral pedida es cero. En efecto, denotando $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$, tendremos:

$$\int_A f dA = \int_{-1}^{1} \int_0^{y(x)} f(x, y)\, dydx = \int_{-1}^{0} \int_0^{y(x)} f(x, y)\, dydx + \int_0^1 \int_0^{y(x)} f(x, y)\, dydx.$$

Pero es claro que $f(-x, y) = -f(x, y)$, por lo que, haciendo el cambio $x = -t$ y volviendo a escribir x en lugar de t se tiene:

$$\int_{-1}^{0} \int_0^{y(x)} f(x, y) dydx = \int_1^0 \int_0^{y(x)} -f(-x, y) dydx = \int_1^0 \int_0^{y(x)} f(x, y) dydx = -\int_0^1 \int_0^{y(x)} f(x, y) dydx,$$

por lo que la suma de integrales es cero, y así: $\int_A f dA = 0$.
El mismo resultado puede alcanzarse realizando las correspondiente integraciones explícitamente.