

Señales y Sistemas

Grado en Ingeniería de Computadores

Revisión matemáticas

José Sáez Landete

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones – Universidad de Alcalá

Cartagena99

Curso 2015-16

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Contenidos

- 1 Numeros complejos
 - Representación
 - Operaciones Básicas
 - Conjugado
 - Resolución de ecuaciones

- 2 Fórmulas matemáticas
 - Expansión en fracciones simples
 - Series geométricas
 - Integrales indefinidas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Representación

Un número complejo z se suele representar en dos formas:

- Cartesiana:

$$z = a + jb,$$

donde j representa la unidad imaginaria (también denominada i) y a y b son números reales.

Se definen:

- $j = \sqrt{-1}$.
 - a es la parte real, $a = \text{Re}\{z\}$.
 - b es la parte imaginaria, $b = \text{Im}\{z\}$.
- Polar:

$$z = re^{j\theta},$$

donde r es el módulo ($r > 0$) y θ es la fase de z . Se suelen denotar por:

$$r = |z|, \quad \theta = \arg\{z\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Fórmula de Euler

Fórmula de Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

Ejemplos:

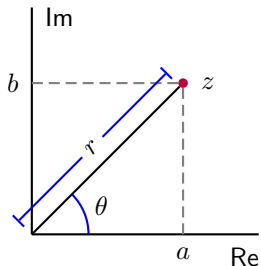
- $e^0 = ?$
- $e^{j\pi/2} = ?$
- $e^{j\pi} = ?$
- $e^{j3\pi/2} = ?$
- $e^{j2\pi} = ?$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Relación entre representaciones

Dado $z = a + jb = re^{j\theta}$:



Cartesiana \Rightarrow polar

$$a = r \cos(\theta)$$

$$b = r \sin(\theta)$$

Polar \Rightarrow Cartesiana

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Example

Cartagena99

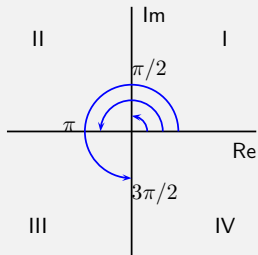
CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Consideraciones sobre la fase

Ángulo o fase

Típicamente trabajamos en radianes: $360^\circ \Rightarrow 2\pi$ rad

Cuadrantes



La función $\arctan(b/a)$ solo puede identificar los cuadrantes I y IV. Para obtener

**CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70**

Cartagena99

Calcular el ángulo o la fase, de $z = a + bi$

Operaciones básicas

Sea $z_j = a_j + jb_j = r_j e^{j\theta_j}$, donde $j = 1, 2$:

Suma

$$z_3 = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

Multiplicación

- Cartesiana: $z_3 = z_1 * z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
- Polar: $z_3 = z_1 * z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$

División

- Cartesiana:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_2^2 + b_2^2}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Operaciones básicas

Potencia

$$z^N = r^N e^{jN\theta}$$

Ejemplo:

Demostrar que $(\cos(\theta) + j \sin(\theta))^N = \cos(N\theta) + j \sin(N\theta)$

Ejemplo: raíces de la unidad

¿cuales son las diferentes soluciones de la ecuación $z^4 = 1$?

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Conjugado

Definición

Teniendo en cuenta que $z = a + jb = re^{j\theta}$:

- Cartesiana: $\bar{z} = z^* = a - jb$.
- Polar: $\bar{z} = z^* = re^{-j\theta}$

Reflexión sobre el eje de abscisas.

Ejemplos

- $|z|^2 = z \cdot z^*$
- $\frac{z}{z^*} = ?$
- $z + z^* = ?$
- $z - z^* = ?$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Resolución de ecuaciones

Sea un polinomio:

$$P(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0$$

Teorema fundamental del algebra

Si los coeficientes a_j , $j = 0, \dots, N$ son reales, las raíces son: o bien reales, o bien son pares conjugados.

Obtención de las raíces

- El método de Ruffini
- Mediante herramientas numéricas, por ejemplo, Matlab.

» `r = roots([a_N, a_{N-1}, ..., a_0]);`

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Expansión en fracciones simples

Sea un cociente de polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde el grado del denominador es mayor que el del numerador.

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

y α_j son los ceros reales y distintos. La descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{x - \alpha_1} + \frac{c_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{c_n}{x - \alpha_n}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Expansión en fracciones simples

Si tenemos raíces complejas conjugadas (caso irreducible):

$$\frac{x^2 + 1}{(x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{a}{x + 2} + \frac{b}{x - 1} + \frac{cx + d}{x^2 + x + 1}.$$

Raíces con multiplicidad r

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - \alpha)^r} = \frac{c_1}{x - \alpha} + \frac{c_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{c_r}{(x - \alpha)^r}.$$

Ejemplo:

$$\frac{3x + 5}{(1 - 2x)^2} = \frac{A}{(1 - 2x)^2} + \frac{B}{(1 - 2x)} = \frac{13/2}{(1 - 2x)^2} + \frac{-3/2}{(1 - 2x)}.$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Caso General

Grado del numerador mayor o igual que el denominador

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = P(x) + \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^{j_i} \frac{A_{ir}}{(x - a_i)^r} + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{k_i} \frac{B_{ir}x + C_{ir}}{(x^2 + b_i x + c_i)^r}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^3 + 16}{x^3 - 4x^2 + 8x} = 1 + \frac{4x^2 - 8x + 16}{x(x^2 - 4x + 8)}$$

donde:

$$\frac{4x^2 - 8x + 16}{x(x^2 - 4x + 8)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 4x + 8}$$

Finalmente:

$$f(x) = 1 + 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 - 4x + 8} \right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Series geométricas

Suma	Condición
$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$	ninguna
$\sum_{n=0}^N a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$	ninguna
$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$	$ a < 1$

Ejercicio

Calcular la suma:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Algunas integrales típicas

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70