

Soluciones a los problemas del tutorial

Estructuras Discretas: Relaciones

PROBLEMA 1:

Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y tal que $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + b$ es par. Demostrar que es una relación de equivalencia y calcular sus clases de equivalencia.

SOLUCIÓN.

Veamos si es reflexiva simétrica y transitiva:

- 1) Tanto si z_1 es par como si impar $z_1 + z_1$ será par y entonces $z_1\mathcal{R}z_1$, luego es reflexiva.
- 2) Si $z_1 + z_2$ es par $z_2 + z_1$ es necesariamente par así que es simétrica.
- 3) Para que sea transitiva se debe cumplir que $z_1\mathcal{R}z_2 \wedge z_2\mathcal{R}z_3 \Rightarrow z_1\mathcal{R}z_3$. Vamos todos los casos posibles. Si z_1 es par z_2 tiene que ser par para que $z_1 + z_2$ sea par. Si z_2 es par z_3 tiene que ser par para que $z_2 + z_3$ sea par. Pero entonces esto significa que $z_1 + z_3$ es par. Por otro lado si z_1 es impar z_2 tiene que ser impar para que $z_1 + z_2$ sea par. Si z_2 es impar z_3 tiene que ser impar para que $z_2 + z_3$ sea par. Pero entonces esto significa que $z_1 + z_3$ es par. Luego $z_1\mathcal{R}z_2 \wedge z_2\mathcal{R}z_3 \Rightarrow z_1\mathcal{R}z_3$ como queríamos demostrar.

PROBLEMA 2:

Demostrar que las siguientes relaciones son de equivalencia. Encontrar las correspondientes clases de equivalencia y el conjunto cociente V/\mathcal{R} :

1. $V = \mathbb{Z}$ y $v\mathcal{R}w$ si $|v - w|$ es múltiplo de 2.
2. $V = \mathbb{Z}$ y $v\mathcal{R}w$ si $v^2 - w^2 = v - w$. Describir la clase de equivalencia de 2005.
3. $V = \mathbb{R}^2$ y $(x, y)\mathcal{R}(u, w)$ si $xy = uw$.
4. $V = \mathbb{R}^2$ y $(x, y)\mathcal{R}(u, w)$ si $(x - y)(x + y) = (u - w)(u + w)$.
5. $V = \mathbb{R}^2$ y $(x, y)\mathcal{R}(u, w)$ si $x^2 + y^2 = u^2 + w^2$.

SOLUCIÓN.

Si definimos sobre un conjunto no vacío A una función f definida sobre un dominio, entonces

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

par w también lo es y lo será u si $w\mathcal{R}u$. Entonces $v\mathcal{R}u$. Lo mismo se puede decir para el caso



impar y por tanto es transitiva. Las clases serán los pares y los impares así que $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{[0], [1]\}$.

2) En este caso podemos reescribir $v^2 - w^2 = v - w$ como $f(v) = v^2 - v = w^2 - w = f(w)$ y las condiciones del encabezado se pueden aplicar. Luego es reflexiva, simétrica y transitiva.

Podemos introducir en $v^2 - v = w^2 - w$ tanto las soluciones $v = 1 - w$ como $v = w$ y comprobar que son correctas. Así que si tomamos $w = n$ las clases serán $[n] = \{(n, 1 - n), n \in \mathbb{N}\}$ y en este caso $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \mathbb{N}$.

La clase de equivalencia de 2005 será $[2005] = [2005, -2004]$.

3) Es de equivalencia ya que es reflexiva, simétrica y transitiva porque es una función del tipo $f(x, y) = f(u, w)$.

Si tomamos $xy = \alpha = \text{constante}$ vemos que o bien son hipérbolas en los cuadrantes de \mathbb{R} superior derecho e inferior izquierdo (para $\alpha > 0$), en los cuadrantes superior izquierdo e inferior derecho (para $\alpha < 0$) o son los propios ejes coordenados (para $\alpha = 0$) y por tanto cubrimos todo \mathbb{R} , así que $V/\mathcal{R} = \mathbb{R}$

4) Es de equivalencia ya que es reflexiva, simétrica y transitiva, porque es una función del tipo $f(x, y) = f(u, w)$. Además se puede ver que en realidad la condición es $x^2 - y^2 = u^2 - w^2$.

5) Es de equivalencia ya que es reflexiva, simétrica y transitiva al ser una función del tipo $f(x, y) = f(u, w)$.

Si tomamos $x^2 + y^2 = \alpha = \text{constante}$ vemos que o bien son las bisectrices de los ejes coordenados (para $\alpha = 0$) o las hipérbolas superiores e inferiores ($\alpha > 0$) o bien de los lados ($\alpha < 0$). $V/\mathcal{R} = \mathbb{R}^2/\mathcal{R} = \mathbb{R}$

PROBLEMA 3:

Sea la relación \mathcal{R} definida sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de manera que $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si y sólo si $a + b = c + d$. Demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia y que existe una biyección entre el conjunto cociente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ y \mathbb{N} .

SOLUCIÓN.

Es reflexiva pues $a + b = a + b$. Es simétrica por si $a + b = c + d$ entonces $c + d = a + b$ y es transitiva pues si $a + b = c + d$ y $c + d = e + f$ entonces $a + b = e + f$. Luego es una relación de equivalencia.

Si tomamos $a + b = \alpha = \text{constante}$, entonces α necesariamente pertenece a \mathbb{N} menos el 1. Veamos unos cuantos casos:

$$\begin{aligned} 2 &= (1,1) \\ 3 &= (1,2) \text{ o } (2,1) \\ 4 &= (2,2) \text{ o } (1,3) \text{ o } (3,1) \\ 5 &= (4,1) \text{ o } (3,2) \text{ o } (2,3) \text{ o } (1,4) \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Las clases de equivalencia serán del tipo

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

es una relación de equivalencia y encontrar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

SOLUCIÓN.

La relación se puede escribir de la forma $f(x) = f(y)$ sin más que pasar unos términos al otro lado de la igualdad, con lo que tendremos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y podemos aplicar lo mencionado ya mencionado para funciones. Así que es una relación de equivalencia. Aunque obviamente $a/b = a/b$ (reflexiva), $a/b = c/d = a/d$ (simétrica) y $a/b = c/d = e/f \Rightarrow a/b = e/f$ (transitiva).

Si tomamos valores $a/b = \alpha$, es decir $a = \alpha b$ (ecuación de la recta), vemos que son rectas de cualquier pendiente que pasan por el origen pero sin incluirle. El conjunto cociente será $V/\mathcal{R} = \mathbb{R}$

PROBLEMA 5:

Una relación \mathcal{R} definida en V es circular si verifica

$$(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Rightarrow c\mathcal{R}a.$$

Demostrar que una relación \mathcal{R} es de equivalencia si y sólo si es circular y reflexiva.

SOLUCIÓN.

Nos piden demostrar que es de equivalencia \Leftrightarrow circular y reflexiva. Lo haremos en dos pasos.

1) de equivalencia \Rightarrow circular y reflexiva.

Si es de equivalencia ya es reflexiva, simétrica y transitiva, así que ya se cumple que sea reflexiva. Como es transitiva $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$ y al ser simétrica $a\mathcal{R}c \Rightarrow c\mathcal{R}a$, así que $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Rightarrow c\mathcal{R}a$ y por tanto es circular.

2) de equivalencia \Leftarrow circular y reflexiva.

Si es circular $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Rightarrow c\mathcal{R}a$, pero si es reflexiva entonces $\exists b\mathcal{R}b$, así que $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}b) \Rightarrow b\mathcal{R}a$ y por tanto es simétrica. Falta demostrar que sea transitiva.

Si es circular $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Rightarrow c\mathcal{R}a$, pero como ya hemos demostrado que es simétrica $c\mathcal{R}a \Rightarrow a\mathcal{R}c$ y por tanto $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$ que es la definición de transitiva.

PROBLEMA 6:

Una relación \mathcal{R} definida en V es débilmente transitiva si para todo $a, b, c, d \in V$ se verifica que

$$(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \wedge (c\mathcal{R}d) \Rightarrow a\mathcal{R}d.$$

Discutir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- (1) Toda relación simétrica y débilmente transitiva es transitiva.
- (2) Toda relación reflexiva, simétrica y débilmente transitiva es de equivalencia.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$(a\mathcal{R}c)$ que es precisamente la definición de transitiva, así que es verdad.

PROBLEMA 7:

Probar que la relación \leq es una relación de orden en el conjunto \mathbb{N} .

SOLUCIÓN.

Es reflexiva pues $a \leq a$ para todo elemento de \mathbb{N} . Además si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces necesariamente $a \leq c$, luego es transitiva. Falta por demostrar la antisimetría.

No es simétrica pues $a \leq b \not\Rightarrow b \leq a$, pero no nos garantizaría la antisimetría aún en el caso general. En este caso en particular si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces necesariamente $a = b$, luego es antisimétrica.

PROBLEMA 8:

Probar que la relación \mathcal{R} sobre \mathbb{N} definida como $a\mathcal{R}b$ si y sólo si a divide a b ($a|b$, es decir que la dividir b por a el resto es cero) es una relación de orden.

SOLUCIÓN.

Es reflexiva pues todo número se divide a sí mismo $a|a$. Pero, ¿ $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$?, es decir, ¿es transitiva? Si dividimos c entre b y nos da d entonces $c = b \cdot d$ y lo mismo para a y b de tal modo que podemos escribir $b = a \cdot e$. Si sustituimos la segunda expresión en la primera tenemos que $c = a \cdot e \cdot d$ y por tanto que $a|c$, así que es transitiva. Y es antisimétrica, pues si $a|b$ y $b|a$ entonces necesariamente debe ser el mismo número $a = b$.

Obsérvese que si fueran los enteros (\mathbb{Z}) en lugar de los naturales (\mathbb{N}) no sería antisimétrica. Podemos dar un contraejemplo muy sencillo: $2|-2$ y $-2|2$ pero $2 \neq -2$.

PROBLEMA 9:

Determinar si las relaciones representadas por las siguientes matrices de adyacencia son relaciones de orden parcial o total.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

En A_1 vemos que debido al elemento (3,2) de la matriz la relación no es antisimétrica. A_2 nos dice que la relación es transitiva y antisimétrica. A_3 es antisimétrica y reflexiva, pero no transitiva. A_4 es antisimétrica y transitiva, además todos los elementos están comparados.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**