

Apellidos Nombre
 DNI Grupo **Tiempo 30 minutos**

Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Marque con una cruz, a lo sumo, una opción por pregunta.

Puntuación: Correcto: +2,5. Error: -0.5. En blanco: 0.

SÍ NO

1. Considérese $p(x) = x^{17} - 3x^{12} + 83x^9 - 27x^5 + 1$. Su polinomio de Taylor de orden 11 centrado en 0 es $83x^9 - 27x^5 + 1$.

2. Sean $f \in C^5(0, 1)$ y $c \in (0, 1)$ tales que $f'(c) = f''(c) = f^{(3)}(c) = f^{(4)}(c) = 0$, pero $f^{(5)}(c) = 1$. Entonces, f tiene un mínimo local en c .

3. Si $f : (-2\pi, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable, entonces f es integrable en $[-\pi, \pi]$.

4. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Mediante el cambio de variable $t = \cos x$, tenemos que

$$\int_0^{\pi/4} f(\cos x) dx = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

5. Toda sucesión $(a_n)_{n=1}^\infty$ tal que $a_n < a_{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$ que esté acotada inferiormente es convergente.

6. La suma de la serie geométrica $\sum_{n=0}^\infty \frac{4^n}{3^n}$ es -3 .

7. La serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{(n-2)^{4n}}{(7n^4 + 5n^3 + 3n^2 - n - 1)^n}$ es convergente.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. El hecho de que existan todas las derivadas direccionales de f en un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ no implica que f sea diferenciable en (x_0, y_0) .



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Apellidos Nombre
 DNI Grupo **Tiempo 20 minutos**

Comience a responder EN ESTA HOJA.

Las respuestas sin justificar recibirán muy poca o ninguna puntuación.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Razone que f es continua.
2. Calcule el polinomio de Taylor de grado cuatro en 0 de la función $g(x) = \text{sen}^2(x)$.
3. Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f^2(t) - 1 dt}{x^3}.$$

Solución:

1. f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser un cociente de funciones continuas y no anularse el denominador. Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, la función f es continua.
2. Calculamos las primeras seis derivadas de g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \text{sen } x \cos x = \text{sen}(2x). \\ g''(x) &= 2 \cos(2x). \\ g'''(x) &= -4 \text{sen}(2x). \\ g^{(4)}(x) &= -8 \cos(2x). \end{aligned}$$

El polinomio de Taylor de grado 4 de g en 0 es, por tanto:

$$P_4(g; 0)(x) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{8}{4!}x^4 = \boxed{x^2 - \frac{x^4}{3}}.$$

Otra alternativa es la siguiente: Puesto que el alumno debería conocer cómo es el poli-

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

(3!) 3! (3!)^2



Apellidos Nombre
 DNI Grupo **Tiempo 20 minutos**

obtenemos que

$$P_4(g; 0)(x) = x^2 - \frac{2x^4}{3!} = \boxed{x^2 - \frac{x^4}{3}}$$

3. Como f es una función continua, tenemos que $f^2(t) - 1$ es continua. Así, el numerador es una función derivable en $(0, +\infty)$. El denominador es un polinomio y, por tanto, derivable en $(0, +\infty)$, y no se anula en dicha semirrecta. Además, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x \frac{f(t)}{t^2} - 1 dt = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0$. Estamos en las hipótesis de la regla de L'Hôpital. Como, por el teorema de Taylor,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^2(x) - 1}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{3x^2} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) - 1}{3x^2} = \frac{-1}{9}, \end{aligned}$$

la regla de L'Hôpital garantiza que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f^2(t) - 1 dt}{x^3} = \frac{-1}{9}.$$

Si en lugar de poner $o(x^4)$, ponemos el resto de Lagrange: $\frac{g^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{16 \text{sen}(2\xi)}{5!}x^5$ para cierto $\xi \in (0, x)$, aparece el término $\frac{16 \text{sen}(2\xi)x^3}{3 \cdot 5!x^2} = \frac{16 \text{sen}(2\xi)x}{3 \cdot 5!}$. Como $0 < \xi < x$, el límite de esta expresión cuando $x \rightarrow 0^+$ es cero.

□



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Apellidos Nombre
 DNI Grupo **Tiempo 20 minutos**

Comience a responder EN ESTA HOJA.

Las respuestas sin justificar recibirán muy poca o ninguna puntuación.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Demuestre que si f es continua en $(0, 0)$, entonces está localmente acotada en $(0, 0)$.

Solución: Sea $\varepsilon = 1 > 0$. Como f es continua en $(0, 0)$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|(x, y)\| < \delta$, entonces $|f(x, y) - f(0, 0)| < 1$. Así, si $0 < \|(x, y)\| < \delta$, entonces

$$|f(x, y)| - |f(0, 0)| \leq |f(x, y) - f(0, 0)| < 1,$$

de donde $|f(x, y)| < |f(0, 0)| + 1$. Como para $(x, y) = (0, 0)$ también verifica esta desigualdad, concluimos que f está acotada en $B_\delta(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| < \delta\}$ y, por tanto, está localmente acotada en $(0, 0)$. \square



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Apellidos Nombre
 DNI Grupo **Tiempo 20 minutos**

Comience a responder EN ESTA HOJA.

Las respuestas sin justificar recibirán muy poca o ninguna puntuación.

Considérese la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Estúdiense la continuidad de f .
2. Calcúlense, donde existan, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
3. Calcúlense las derivadas direccionales $D_u f(0, 0)$ para todo vector unitario $u = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$.
4. Demuestre que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Solución:

1. En el abierto $R = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la función f es un cociente de polinomios y el denominador no se anula, luego f es continua en R . Como $(0, 0)$ es punto de acumulación del dominio, podemos caracterizar la continuidad en él mediante límites. Dado que

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| = |x| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0,$$

el criterio del sándwich garantiza que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = f(0, 0) = 0.$$

Por lo tanto, f es también continua en $(0, 0)$.

Otra alternativa es la siguiente:

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{r^3 \cos \theta \text{sen}^2 \theta}{r^2} \right| = |r| |\cos \theta \text{sen}^2 \theta| \leq |r| \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Por el criterio del sándwich, concluimos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ y, por tanto, f es

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$\frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$



Apellidos Nombre
 DNI Grupo **Tiempo 20 minutos**

mientras que en $(0, 0)$ tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función f tiene derivadas parciales en todo su dominio.

3. La derivada direccional en $(0, 0)$ según la dirección $u = (\cos \theta, \sin \theta)^\top$ son:

$$\begin{aligned} D_u f(0, 0) &= D_{(\cos \theta, \sin \theta)^\top} f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t \cos \theta, 0 + t \sin \theta) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos \theta \ t^2 \sin^2 \theta}{t^2 \cos^2 \theta + t^2 \sin^2 \theta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \cos \theta \sin^2 \theta = \cos \theta \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

4. Si f fuera diferenciable en $(0, 0)$, debería cumplirse que, para $\theta \in [0, 2\pi)$,

$$D_{(\cos \theta, \sin \theta)^\top} f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = (0, 0) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = 0.$$

Pero si $\theta \notin \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, entonces $D_{(\cos \theta, \sin \theta)^\top} f(0, 0) = \cos \theta \sin^2 \theta \neq 0$. Por lo tanto, f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Otra forma de verlo es la siguiente: Para $\theta \in [0, 2\pi)$, el vector $(\cos \theta, \sin \theta, \cos \theta \sin^2 \theta)^\top$ es tangente a la curva sobre la gráfica de f dada por $(r \cos \theta, r \sin \theta, f(r \cos \theta, r \sin \theta))^\top$. Como hay tres de ellos linealmente independientes, por ejemplo, $(1, 0, 0)^\top$, $(0, 1, 0)^\top$ y $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4})^\top$, la función f no puede ser diferenciable en $(0, 0)$.

Otra alternativa más consiste en usar la definición de función diferenciable en un punto. Debe cumplirse que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0,$$

pero si consideramos la semirrecta $y = x$ con $x > 0$, tenemos que

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

