

## EJERCICIOS TEMA 1. MATRICES Y DETERMINANTES

### Matrices

1. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

realizar, cuando sea posible, las siguientes operaciones:

i)  $(A_1 + A_2) \cdot A_3$       ii)  $A_1 - 2A_2$       iii)  $A_1/3$       iv)  $A_3 - 2A_3$       v)  $A_1A_2$

2. Realizar las operaciones indicadas con las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

i)  $B \cdot A$       ii)  $A \cdot C$       iii)  $C \cdot D$       iv)  $C \cdot B$       v)  $C \cdot B + A$

3. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

comprobar que  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

4. Hallar todas las matrices que conmutan con la matriz  $A$ :

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$       b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$       c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ , hallar  $A^2 + 3A - 10I$ .

6. Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2 cuyos cuadrados sean igual a la matriz nula.

7. Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2 cuyos cuadrados sean igual a la matriz iden-

--- --

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



### Determinantes

9. Comprobar, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son nulos

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} -a & -4a & -3a \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} \sin^2 a & 1 & \cos^2 a \\ \sin^2 b & 1 & \cos^2 b \\ \sin^2 c & 1 & \cos^2 c \end{vmatrix}$$

10. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular  $\det(A)$ ,  $\det(B)$  y  $\det(A^{-1}B)$ .

11. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

12. Calcular el determinante de las siguientes matrices reduciéndolas a matrices triangulares:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

13. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & b & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , con  $|A| = ab + 2$ , calcular los determinantes de las siguientes matrices, utilizando  $|A|$  y las propiedades de los determinantes (especificar en cada caso que propiedad se usó):

$$a) A_1 = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b) A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & b & 0 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad c) A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) A_4 = \begin{pmatrix} 3a & 2 & 0 \\ -3 & b & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad e) A_5 = \begin{pmatrix} 3a & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 3b \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad f) A_6 = \begin{pmatrix} a+2 & 2 & 0 \\ -1+b & b & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g) A_7 = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & b & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^3$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

$$a) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

15. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad (c) C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

16. Hallar el valor de  $a$  para que la matriz  $A = \begin{pmatrix} a-1 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2a-2 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$  tenga:

i) rango 3      ii) rango 2      iii) rango 1

17. Determinar el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro  $a$  :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & a-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Hallar el valor de  $a$  para que la matriz  $A$  sea invertible

$$a) A = \begin{pmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & a & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2a & a \end{pmatrix}$$

19. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  y  $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$  comprobar que:

i)  $C$  es la inversa de  $A$       ii)  $D$  es la inversa de  $B$       iii)  $C + D$  NO es la inversa de  $A + B$

20. Calcular, cuando se pueda, la inversa de las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

21. Calcular la inversa de las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

**Cartagena99**

**Cuestiones**

22. ¿Cuáles de las siguientes matrices podemos garantizar que sea igual a  $(A + B)^2$ ?
- (i)  $(B + A)^2$ , (ii)  $A^2 + 2AB + B^2$ , (iii)  $A(A + B) + B(A + B)$ , (iv)  $(A + B)(A + B)$ ,  
 (v)  $A^2 + AB + BA + B^2$
23. Justificar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
- a) Si  $A, B \in M_{n \times n}$  son invertibles entonces  $A + B$  y  $AB$  también lo son.  
 b) Si  $A, B \in M_{n \times n}$  entonces  $(AB)^2 = A^2B^2$ .  
 c) Si  $A \in M_{n \times n}$  es invertible entonces  $A^n$  también lo es y  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ .  
 d) Si  $A \in M_{n \times n}$  entonces  $AA^t + A^tA$  es una matriz simétrica.
24. Sea  $A \in M_{n \times n}$  una matriz triangular. Calcular  $\det(A)$ . Si todos los elementos de la diagonal principal son positivos (es decir,  $a_{ii} \geq 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ ) y  $\text{tr}(A) = 0$  ¿cuánto valdrá  $\det(A)$ ?
25. Sea  $B \in M_{n \times n}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Hallar una expresión para  $\det(\lambda B)$  y comparar con  $\lambda \det(B)$ .
26. Si  $A \in M_{n \times n}$  es una matriz triangular, ¿su adjunta será triangular?
27. Si  $A$  es una matriz tal que  $A^4 = 0$ , ¿puede ser  $A$  invertible?
28. Si una matriz  $A$  tiene inversa, demostrar que es única.
29. Si  $A \in M_{n \times n}$  es una matriz invertible y  $B \in M_{n \times n}$  es una matriz singular ¿ $AB$  será una matriz singular o no singular? ¿y  $A + B$ ?
30. Sean  $A \in M_{m \times n}$  y  $B \in M_{n \times p}$ . Utilizando la siguiente propiedad de los rangos:  
 $\text{rang}(AB) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$ , hallar cual sería el rango del producto de una matriz columna por una matriz fila.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70