

Capítulo 1

Límites y continuidad de funciones de varias variables reales

1.1. Funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n

Ejercicio 1. Calcular **dominio**, **recorrido**, y describir los conjuntos de nivel (identificar parábolas, hipérbolas, elipsoides, etc), así como las gráficas de las siguientes funciones.

Nota: puede ser útil usar algún programa de representación gráfico para ver el aspecto de las funciones y curvas de nivel.

a) $f(x, y) = x - y + 2$

b) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

c) $f(x, y) = -xy$

d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$

e) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

f) $f(x, y) = x^3 - x$

g) $f(x, y) = 4 - 3x + 2y$

h) $f(x, y) = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$

i) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

j) $f(x, y) = x^2 + y^2$

k) $f(x, y) = 3x - 7y$

l) $f(x, y) = x^2 + xy$

m) $f(x, y) = x/y$

n) $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2$

ñ) $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2$

o) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

p) $f(x, y, z) = xy$

q) $f(x, y, z) = xy + yz$

r) $f(x, y, z) = xy + z^2$

s) $f(x, y) = |y|$

t) $f(x, y) = \max(|x|, |y|)$

1.2. Límites y continuidad de las funciones de varias variables

Ejercicio 2. Demostrar la existencia de los siguientes límites

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^3 y,$

$$\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta.$$

$$|x^3 y - 0| = |x^3 y| \leq |x|^3 |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}^3 \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^2 \leq \delta^2.$$

Tomando $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ demostramos que el límite vale 0.

h) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x/n}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

de proceder es usando las propiedades de los límites, de forma que el límite de la exponencial y de la

función y en $(0, 1)$ existe y ambos valen 1, así el límite del producto es el producto de los límites.

En lo que sigue, cuando se demuestren límites mediante el sistema $\delta - \varepsilon$ en el origen, se considera siempre que el punto (x, y) está contenido en una bola centrada en el origen y de radio δ , es decir, $0 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta$, tal y como se considera en la definición de límite.

c)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2},$$

$$\left| \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{2|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{3\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = 3\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\delta = \varepsilon$$

tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

d)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

$$\left| \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \left| \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta = \varepsilon.$$

e)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{xy}.$$

En este caso desarrollando el numerador tenemos

$$\frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy - x^2 - y^2 + 2xy}{xy} = 4$$

La función es constante y con valor 4, de forma que el límite no tiene ningún problema y vale 4.

f)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4},$$

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4} - 0 \right| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}^3}{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\delta = \varepsilon,$$

considerando $\delta = \varepsilon/2$.

g)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y},$$

$$\left| \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} \right| = \left| \frac{(x - y)^2}{x - y} \right| = |x - y| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\delta = \varepsilon,$$

volviendo a tomar $\delta = \varepsilon/2$.

h)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4 + ax^2y}{2x^2 + 2y^2 - xy}, a \in \mathbb{R}:$$

Empezamos probando los límites iterados

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^4 + y^4 + ax^2y}{2x^2 + 2y^2 - xy} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} = 0.$$

Ocurre lo mismo para el otro límite iterado. Pasamos a probar las rectas de la forma $y = mx$:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$\leq \frac{2(x^2 + y^2) + |a|\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \leq 2(x^2 + y^2) + |a|\sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta(2\delta + |a|) = \varepsilon.$$



Hemos considerado $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2+|a|}\}$. Por otro lado, en el segundo \leq hemos considerado $x^2 + y^2 + (x^2 + y^2 - xy) \geq x^2 + y^2$. Esto puede comprobarse de varias formas:

- $xy \leq |x||y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$. De esta forma vemos que el segundo sumando de $x^2 + y^2 + (x^2 + y^2 - xy)$ es definido positivo, por lo que podemos eliminarlo.
- Considerando $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \leq (x^2 + y^2) \Rightarrow 0 \leq x^2 + y^2 - xy$.

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + kx^3}, k \in \mathbb{R}$.

Si reescribimos el denominador tenemos

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + kx^3} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)(1 + \frac{kx^3}{x^2 + y^2})} = \frac{1}{1 + \frac{kx^3}{x^2 + y^2}}$$

Por un lado, el numerador tiene límite 1, y por otro, el denominador también, y puesto que el límite del denominador es distinto de 0, podemos aplicar las propiedades de los límites, de forma que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + kx^3} = 1.$$

j) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$.

En este caso tenemos

$$\|(x, y, z) - (0, 0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq \delta.$$

De esta forma

$$\left| \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} - 0 \right| \leq \frac{|x||y||z|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq \delta = \varepsilon,$$

Tomando $\delta = \varepsilon$.

Ejercicio 3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

El único punto conflictivo es el origen. Empecemos calculando los límites iterados en primer lugar

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$
- $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y^2}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 2 = 2$

Como los límites iterados no coinciden el límite en el origen no existe y por tanto la función presenta una discontinuidad en $(x, y) = (0, 0)$.

b) $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x-y)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

El único punto conflictivo es el origen. Es fácil comprobar que los límites iterados coinciden y valen 0. Por otro lado, tomando rectas $y = mx$ llegamos a un resultado análogo. Resemos a comprobar si el límite en

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

$(x, y) = (0, 0)$

Al igual que pasaba en el apartado anterior, el único punto conflictivo es el origen, y los límites iterados y sobre las rectas $y = mx$ coinciden y valen 0. Vamos a comprobar que el límite existe

$$\left| \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta = \varepsilon,$$

considerando $\delta = \varepsilon$. Tenemos así que la función es continua.

$$d) \ j(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

El punto conflictivo es el origen. Consideremos una recta $y = mx$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^4}{m^2 x^4 + x^2(1-m)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^2}{m^2 x^2 + (1-m)^2}$$

Para $m \neq 1$ el límite vale 0. Sin embargo, si tomamos $m = 1$ tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^2}{m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Como los límites toman valores distintos dependiendo del valor de m , concluimos que el límite no existe, y por tanto la función no es continua en el origen.

1.3. Existencia y cálculo de límites

Ejercicio 4. Calcular, en caso de que existan, los siguientes límites:

$$a) \ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^4} = 0.$$

El límite no existe, pues los límites iterados no coinciden.

$$b) \ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y^2}{x^2 + y^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm\infty \rightarrow \text{No existe,}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1,$$

Uno de los límites iterados no existe, por lo que el límite tampoco.

$$c) \ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}.$$

Calculemos el límite a lo largo de la recta $y = mx$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x^8 + y^8} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{x^8} = 0,$$



$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x^8 + y^8} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^8} = 0,$$

Ahora vamos a probar el límite a lo largo de la recta $y = mx$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^4}{m^2 x^4 + x^8(1 + m^8)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2}{m^2 + x^4(1 + m^8)} = 1$$

Vemos que los límites iterados y los límites a lo largo de las rectas $y = mx$ no coinciden, por lo que el límite no existe.

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{|x| + |y|}.$

Tómese las rectas $y = mx$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|mx^2|}}{|x| + |mx|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|\sqrt{|m|}}{|x|(1 + |m|)} = \frac{\sqrt{|m|}}{1 + |m|}$$

Como el límite depende de la recta que consideremos, sabemos que el límite no existe.

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{y}.$

En este caso vamos a usar el desarrollo del seno mediante infinitésimos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + o(|xy|)}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x + x \frac{o(|xy|)}{xy} = 0,$$

donde hemos usado que el límite de un producto (suma) es el producto (suma) de los límites.

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{y}.$

Para este caso procedemos como en el anterior

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 + xy + o(|xy|) - 1}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x + x \frac{o(|xy|)}{xy} = 0.$$

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 2}.$

Dado que el límite del denominador es 2, podemos recurrir a la propiedad de que el límite de una fracción es igual a la fracción de los límites, por lo que concluimos $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 2} = 0$

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 y^2}.$

Recurrimos al desarrollo mediante infinitésimos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \frac{(xy)^2}{2} + o(|xy|^2) - 1}{x^2 y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{1}{2} + \frac{o(|xy|^2)}{(xy)^2} = -\frac{1}{2}$$

Como el límite depende de m tenemos que no existe.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(x) - 1 - x^2/2}{x^4 + y^4}$.

Calculemos los límites iterados

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 - x^2/2}{x^4 + y^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 - x^2/2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) - x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\cos x + 1}{12x^2} \rightarrow \pm\infty$$

Como este el límite iterado no existe, el límite de la función tampoco.

m) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{xyz} = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz + o(|xyz|)}{xyz} = 1$

n) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{x + 1} = 0$.

Como el denominador tiene límite 1, podemos usar las propiedades de los límites.

ñ) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{2x^2y \cos(z)}{x^2 + y^2}$

Tanto límites iterados como a lo largo de las rectas $y = mx$ coinciden y toman el valor 0, por lo que pasamos a probar directamente mediante la demostración $\delta - \varepsilon$

$$\left| \frac{2x^2y \cos z}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{2x^2|y|}{x^2 + y^2} |\cos z| \leq \frac{2x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{2x^2|y|}{x^2} \leq 2|y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\delta = \varepsilon$$

donde hemos considerado $\delta = \varepsilon/2$.

Ejercicio 5. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en el origen de coordenadas:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Es fácil comprobar que los límites iterados y a lo largo de una recta de la forma $y = mx$ valen todos 0, por lo que pasamos a hacer la prueba $\delta - \varepsilon$

$$\left| \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq \frac{|x||y|(|x|+|y|)}{x^2+y^2} \leq \frac{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \leq 2\delta = \varepsilon$$


tomando $\delta = \varepsilon/2$. Por lo tanto, la función es continua.

b) $g(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Empecemos calculando los límites iterados

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{|x|^3} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^3}{|y|^3} = \text{signo}(y)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

tomando $\delta = \varepsilon$. Tenemos así que la función es continua en todo \mathbb{R}^2

$$d) j(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Al igual que en los casos anteriores los límites iterados, a lo largo de rectas $y = mx$ o parábolas $y = kx^2$ dan como resultado 0, por lo que pasamos a la demostración $\delta - \varepsilon$

$$\left| \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{x^2 y^2}{y^2} \leq x^2 \leq (x^2 + y^2) \leq \delta^2 = \varepsilon$$

Tomando $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow shadow or underline beneath the text.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**