Tema 2: probabilidad

1. [Spiegel 1.7] Se saca una bola al azar de una caja que contiene 6 bolas rojas, 4 blancas y 5 azules. Determina la probabilidad de que la bola sea (a) roja, (b) blanca, (c) azul (d) no sea roja (e) sea roja o blanca.

Solution: (a) 2/5 (b) 4/15 (c) 1/3 (d) 3/5 (e) 2/3.

2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un 3 en dos lanzamientos de un dado balanceado? (nos referimos al número de 3s sacados, no a la suma).

Solution: 11/36

3. [Ross, 3.18] Un grupo de 5 chicos y 10 chicas quieren sentarse en un banco.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cuarta persona sea un chico?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la decimo-segunda posición esté ocupada por un chico?
   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que un chico en particular esté en la tercera posición?

Solution: (a) 1/3 (b) 1/3 (c) 1/15.

4. Una caja A contiene cinco canicas rojas y tres azules, una caja B contiene dos rojas y tres azules. Se coje una canica al azar de cada caja:
   (a) Halla la probabilidad p de que ambas sean rojas.
   (b) Halla la probabilidad p de que una sea roja y otra azul.

Solution: (a) 1/4 (b) 21/40.

5. [Ross, 3.22,3º ed.] Un armario tiene 10 pares de zapatos. Si seleccionamos 8 zapatos al azar, Cuál es la probabilidad de (a) no seleccionar un par completo, (b) seleccionar exactamente un par completo.

Solution: (a) $\frac{\binom{10}{8}2^8}{\binom{20}{8}}$
(b) $10\frac{\binom{9}{6}2^6}{\binom{20}{8}}$

6. [Spiegel 1.25] En una línea están acomodadas cinco canicas rojas, 2 blancas y 3 azules. Si las canicas del mismo color son indistinguibles. ¿Cuántas ordenaciones distintas existen?

Solution: 2520.

7. ¿Cuántas "hamburguesas" distintas pueden hacerse con carne, lechuga, tomate, queso y bacon? Entiéndase por hamburguesa la combinación de los anteriores ingredientes, habiendo al menos uno de ellos presente.

Solution: 31.

8. [Spiegel 1.26] ¿De cuántas maneras posibles se pueden sentar 7 personas alrededor de una mesa redonda si (a) se pueden sentar en cualquier lugar, (b) 2 personas se llevan mal y no pueden sentase juntas.

Solution: (a) 720 (b) 480

9. Una racha es una secuencia de valores consecutivos idénticos. Por ejemplo, $RRRBB$ es una secuencia con 1 racha de R y una racha de B; $RBBRR$ tiene 2 rachas de R y 1 de B; $RBBBRRRB$ tiene 2 rachas de R y 2 de B. Con esto en mente, se barajan a cartas rojas idénticas y b cartas negras idénticas al azar, de manera que se suceden rachas de cartas rojas y rachas de cartas negras. Hallar la probabilidad de que se presenten:
   (a) k rachas de cartas rojas y k de cartas negras.
   (b) k rachas de cartas rojas y $k+1$ de cartas negras.
   (c) k rachas de cartas rojas.

Solution: (a)La clave para resolver el ejercicio es darse cuenta que para construir k rachas de rojas solo tenemos que *repartir* las a cartas rojas en k grupos (¿Por qué?). Procediendo del mismo modo para las cartas negras, llegaríamos a

$$2\frac{\binom{a-1}{k-1}\binom{b-1}{k-1}}{\binom{a+b}{a}},$$

donde el factor 2 se original por el hecho de que debemos decidir si empezamos por cartas rojas o negras.
(b)Procediendo de forma similar y teniendo en cuenta que debemos empezar necesariamente por las cartas negras obtenemos:

$$\frac{\binom{a-1}{k-1}\binom{b-1}{k}}{\binom{a+b}{a}}$$

(c) En los apartados anteriores hemos calculado los sucesos $A_{k,k}$ (k rachas rojas y k rachas negras) y $A_{k,k+1}$ (k rachas rojas y k +1 negras). Está claro que el suceso A_k (*obtener k rachas rojas*) cumple

$$A_k = A_{k,k} \cup A_{k,k+1} \cup A_{k,k-1}.$$

Dado que los sucesos son disjuntos:

$$P(A_k) = \frac{\binom{a-1}{k-1}}{\binom{a+b}{a}}\left[\binom{b-1}{k-2} + 2\binom{b-1}{k-1} + \binom{b-1}{k}\right]$$

10. [Spiegel 1.35] Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se sacan 3 bolas al azar sin reemplazamiento, determina la probabilidad de que (a) las 3 sean rojas, (b) las 3 sean blancas, (c) 2 sean rojas y 1 blanca, (d) al menos 1 sea blanca, (e) se saque una de cada color, (f) se saquen en el siguiente orden: roja, blanca, azul.

Solution: (a) 14/285 (b) 1/1140 (c) 7/95 (d) 23/57 (e) 18/95 (f) 3/95.

11. a tarjetas blancas y b tarjetas negras se barajan conjuntamente.
    (a) Calcular la probabilidad de que la primera tarjeta blanca esté en la posición k.
    (b) En general, calcular la probabilidad de que la i-ésima tarjeta blanca ocupe la posición k.

Solution: (a) Es fundamental emplear el método constructivo para llegar a la solución. en este apartado, el problema impone dos restricciones muy fuertes. Al estar la primera tarjeta blanca en la posición k, esto implica que las $k-1$ primeras tarjetas son negras y la k-ésima es blanca. Para construir un caso favorable solo hay que elegir cómo repartir las tarjetas blancas y negras sobrantes en jas posiciones que faltan. ¿Cuál serían por tanto las soluciones?

$$\frac{\binom{b}{k-1}a}{\binom{a+b}{k}}\frac{1}{k} = \frac{\binom{a+b-k}{a-1}}{\binom{a+b}{a}}$$

(b) La clave sigue siendo el método constructivo. En este caso, las restricciones más importantes son (1) debe haber $i-1$ tarjetas blancas en las $k-1$ primeras posiciones (¿de cuántas formas podemos hacer esto?), (2) debe haber $k-1-(i-1)$ tarjetas negras en las primeras posiciones (¿de cuántas formas podemos hacer esto?), (3) hay una tarjeta blanca en la posición k y (4) el resto de bolas están en las posiciones restantes. Teniendo todo esto en consideración:

$$\frac{\binom{a}{i-1}(i-1)!\binom{b}{k-i}(k-i)!(a-i+1)(a+b-k)!}{(a+b)!} = \frac{\binom{k-1}{i-1}\binom{n-k}{a-i}}{\binom{a+b}{a}}$$

12. n tarjetas numeradas de 1 a n se barajan y se sitúan alineadas sobre la mesa. Se produce coincidencia en el lugar i, si la tarjeta que ocupa tal lugar, lleva el número i. ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca una coincidencia en el lugar i? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan coincidencias en los lugares i y j? (c) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca *alguna* coincidencia?

Solution: (a) $1/n$. (b) $\frac{1}{n(n-1)}$. (c) Sea A_i el evento *hay coincidencia en el lugar i*. En los apartados (a) y (b) hemos calculado $P(A_i)$ y $P(A_i \cap A_j)$. En este apartado, al pedirnos la probabilidad de alguna coincidencia nos preguntan por $P(\cup_i A_i)$. Usando las fórmulas de inclusión-exclusión llegamos a

$$P(\cup_i A_i) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

13. Se lanzan dos monedas y se tira un dado tantas veces como caras se hayan obtenido. (a) Halla la probabilidad de que la suma de las puntuaciones sea 6. (b) Si sabemos que el resultado del juego es que los dados han sumado 6, ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido 0 caras, 1 cara o 2 caras?

Solution: (a) 17/144 (b) 0, 12/17, 5/17

14. [Ross 3.25] El 52% de los estudiantes de una universidad son mujeres. El 5% de los estudiantes estudian informática. El 2% de los estudiantes son mujeres que estudian informática. Si un estudiante es elegido al azar, calcula la probabilidad de que
    (a) el estudiante sea mujer, dado que el estudiante hace informática.
    (b) el estudiante hace informática, dado que el estudiante sea mujer.

Solution: (a) 2/5 (b) 1/26.

15. [Ross, 3.29] Pides a tu amigo que riegue tu planta mientras estás de vacaciones. Sin agua, la planta morirá con probabilidad 0.8, mientras que con agua las probabilidades se reducen al 0.15. Estas seguro al 90% de que tu amigo se acordará de regar la planta.
    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la planta viva cuando vuelvas?
    (b) Si la planta está muerta, ¿cuál es la probabilidad de que tu amigo se haya olvidado de regar la planta?

Solution: (a) 0.785 (b) $16/43 \approx 0.37$.

16. [Ross, 3.34] El cáncer de próstata es muy común entre los hombres. Para intentar detectarlo, los médicos miden los niveles de la proteína llamada antígeno prostático específico (PSA). Aunque niveles altos de PSA suelen indicar cáncer, el test es poco fiable. La probabilidad de que un hombre sano sea diagnosticado con niveles altos de PSA es aproximadamente 0.135, y esta probabilidad se incrementa hasta 0.268 si el hombre tiene cáncer. Si un médico, basándose en otros factores, cree que un hombre tiene cáncer con probabilidad 0.7, cuál es la probabilidad condicional de que tenga cáncer dado que
    (a) el test indica un nivel elevado de PSA.
    (b) el test no indica un nivel elevado de PSA.

Solution: (a) 0.822 (b) 0.6638.

17. [Ross, 3.36] Se tiran dos dados. Sea E el evento "La suma de los dos dados es 7":
    (a) Muestra que E es independiente del evento "el primer dado es 4".
    (b) Muestra que E es independiente del evento "el segundo dado es 3".

18. Un tipo de misil alcanza su objetivo con probabilidad $p = 1/3$.
    (a) Si se lanzan 3 misiles, halla la probabilidad de que que se alcance el objetivo al menos una vez.
    (b) Hallar el número de misiles que se deben lanzar de tal forma que haya al menos un 90% de probabilidad de alcanzar el objetivo.

Solution: (a) Alcanzar el objetivo al menos una vez es el suceso complementario a "fallar todos los lanzamientos". Como además los sucesos son independientes: $P(\text{alcanzar al menos una vez}) = 1 - (2/3)^3 = 19/27$
(b) Generalizando la fórmula de (a), lo que pide el enunciado es hallar la n que verifique:

$$1 - (2/3)^n \geq 0.9.$$

Como n debe ser entero, la solución de la inecuación es $n \geq 6$.

19. Una mujer tiene n llaves, una de las cuales abre su casa. Si prueba las llaves al azar, descartando las que no funcionan, ¿Cuál es la probabilidad de que abra su puerta al intento k-ésimo? ¿Y si no hubiese descartado llaves?

Solution:
(a) Empleando el método constructivo, el número de casos favorables sería: $\underline{n-1}\ \underline{n-2}\ \ldots \underline{n-(k-1)}\ \underbrace{\underline{1}}_{\text{k-ésimo}}$ mientras que los casos totales serían $\underline{n}\ \underline{n-1}\ \ldots \underline{n-(k-2)}\ \underbrace{\underline{n-(k-1)}}_{\text{k-ésimo}}$ Usando Laplace, la probabilidad pedida es $1/n$.
(b) Ahora los sucesos son independientes (¿Por qué?) por lo que la probabilidad pedida es

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}.$$

20. Cuando los caballos *A, B, C* corren juntos, sus respectivas probabilidades de ganar son 0.3, 0.5 y 0.2. Si los caballos corren 3 veces,
   (a) Halla la probabilidad de que el mismo caballo gane las 3 carreras.
   (b) Halla la probabilidad de que cada uno gane una carrera.

Solution: (a) 4/25 (b) 9/50.

21. *Problema de Monty Hall:* En un concurso de televisión, el concursante elige una puerta entre tres y su premio consiste en lo que se encuentre detrás. Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra. Antes de abrir la elección del concursante, el presentador, que sabe donde esta el premio, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. El presentador le da entonces al concursante la opción de cambiar la puerta escogida (a) ¿Debe el concursante mantener su elección original o debe escoger la otra puerta? (b) ¿Hay alguna diferencia? Resuelve el problema matemáticamente y mediante simulaciones.

Solution: (a) Debe cambiar (b) $P(\text{Ganar si cambia}) = 2/3$, $P(\text{Ganar si no cambia}) = 1/3$.

22. [Ross, 3.42] Un organismo tiene 5 genes que denotamos con las 5 primeras letras del alfabeto. A su vez, cada gen tiene dos formas que distinguiremos usando mayúsculas o minúsculas. La letra mayúscula denotará un gen dominante, mientras que la letra minúscula denotará un gen recesivo. Suponemos que

nuestro organismo es diploide, por lo que cada organismo tiene dos series de genes de cada tipo. Por ejemplo, si A denota el gen de "ojos marrones" y a el gen de "ojos azules", se pueden dar los siguientes resultados:

- aa $\rightarrow$ ojos azules.
- aA, Aa o AA $\rightarrow$ ojos marrones.

La expresión física de los genes se suele llamar fenotipo, mientras que la configuración genética sería el genotipo.

El hecho de que cada tipo de gen aparezca "repetido" es consecuencia de que, durante el apareamiento de 2 organismos, cada progenitor contribuye al material genético de sus hijos con un elemento de su par de genes. Esta contribución se supone al azar. Además, en el organismo que nos ocupa, las contribuciones de los 5 genes se suponen independientes.

En un apareamiento entre organismo con genotipos *aA, bB, cC, dD, eE* y *aa, bB, cc, Dd, ee*, cuál es la probabilidad de que un hijo en concreto se parezca (1) genotípicamente o (2) fenotípicamente a:

(a) El primer padre.

(b) El segundo padre.

(c) Alguno de los padres.

(d) A ninguno de los padres.

Solution: (a) genotípicamente: 1/32; fenotípicamente: 9/128,
(b) genotípicamente: 1/32; fenotípicamente: 9/128,
(c) genotípicamente: 1/16; fenotípicamente: 18/128,
(d) genotípicamente: 15/16; fenotípicamente: 110/128,

23. Un aparcamiento tiene N plazas. Afortunadamente, hemos encontrado la última plaza libre y hemos podido aparcar entre dos plazas (no hemos situado el coche en los extremos). Cuando volvemos al coche, encontramos que, de los N coches, solo quedan r coches aparcados (incluído el nuestro). ¿Cuál es la probabilidad de que nuestros dos vecinos se hayan marchado? Razona detalladamente, usando combinatoria, cuál es la respuesta. Simplifica al máximo las expresiones combinatorias que emplees.

Solution: $\frac{(N-r)(N-r-1)}{(N-1)(N-2)}$

24. [Ross, 3.43] Tres prisioneros son informados de que uno de ellos ha sido elegido al azar para ser liberado, mientras que a los otros dos solo se les rebajará la condena. El prisionero A pregunta al carcelero en privado a cuál de sus compañeros se le rebajará la condena, afirmando que puede divulgar la información sin problemas ya que él ya sabe que al menos uno de sus compañeros estará menos tiempo en la cárcel. El carcelero se niega a contestar, razonando que si A conoce cuál de sus compañeros tendrá una rebaja en la condena, sus probabilidades de ser liberado se incrementan de 1/3 a 1/2, ya que el estaría en el grupo de dos prisioneros que pueden ser liberados. ¿Es correcto el razonamiento del carcelero?

Solution: No, la probabilidad sigue siendo la misma, que es 1/3. Por ejemplo:

$$P(\text{A libre} \mid \text{Carcelero dice B}) = 1/3.$$

25. [Ross, 3.45] En una competición al mejor de 7, el primer equipo que llegue a 4 victorias gana. Supón que en cada partido el equipo A gana de forma independiente con probabilidad p.

(a) Si un equipo va ganando 3 a 0, ¿cuál es la probabilidad de que sea el equipo A el que va ganando?

(b) Si un equipo va ganando 3 a 0, ¿cuál es la probabilidad de que sea este equipo el que gane la competición?

(c) Si $p = 1/2$, ¿cuál es la probabilidad de que el equipo que gane el primer juego gane la competición?

Solution: (a) $p_A = P(A \mid \text{Resultado=3-0}) = \frac{p^3}{p^3+(1-p)^3}$,
(b) $p_A\left(1-(1-p)^4\right) + p_B\left(1-p^4\right)$.
(c) 21/32.

26. De una urna, que contiene inicialmente 1 bola blanca y otra negra, un jugador realiza dos extracciones con reemplazamiento. Si obtiene dos bolas blancas, gana y, en caso contrario, vuelve a intentarlo tras introducir una bola negra a la urna. Hallar la probabilidad de que el jugador gane.

Solution: Definamos B_n como el evento: *sacar dos bolas blancas en el n-ésimo intento* (un intento es sacar dos bolas con reemplazamiento). Podríamos obtener las siguientes probabilidades condicionadas:

$$P(B_1) = 1/4$$

$$P(B_2 \mid \bar{B}_1) = 1/9$$

$$P(B_n \mid \bar{B}_{n-1}, \cdots, \bar{B}_1) = 1/(n+1)^2$$

donde, por ejemplo, $P(B_n \mid \bar{B}_{n-1}, \cdots, \bar{B}_1)$ es la probabilidad de ganar en el n-ésimo intento si no se ha ganado en ninguno de los anteriores. Fíjate que calcular $P(B_2 \mid \bar{B}_1)$ es equivalente a preguntarse cuál es la probabilidad de sacar dos bolas blancas (con reemplazamiento) de una urna con una bola blanca y dos negras. De la misma forma, $P(B_n \mid \bar{B}_{n-1}, \cdots, \bar{B}_1)$ es equivalente a preguntarse cuál es la probabilidad de sacar dos bolas blancas (con reemplazamiento) de una urna con una bola blanca y n negras.

De aquí, usando Bayes, es posible definir la probabilidad de ganar al n-ésimo intento p_n:

$$p_n = P(\bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_{n-1}, B_n) = P(B_n \mid \bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_{n-1}) \cdot P(\bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_{n-1}),$$

para lo que necesitamos calcular $P(\bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_{n-1})$. Esta probabilidad se calcula muy fácilmente a partir de las fórmulas ya derivadas:

$$P(\bar{B}_1, \cdots, \bar{B}_{n-1}) = \frac{2^2-1}{2^2}\frac{3^2-1}{3^2}\cdots\frac{n^2-1}{n^2}.$$

Por tanto

$$p_n = \frac{2^2-1}{2^2}\frac{3^2-1}{3^2}\cdots\frac{n^2-1}{n^2}\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Finalmente,

$$\text{Probabilidad de ganar} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n.$$

Podemos aproximar esta probabilidad con R, implementando p_n y sumando un gran número de valores (en lugar de sumar infinitos valores):

```r
pn = function(n) {
  if (n == 1) {
    1 / (n + 1) ^ 2
  } else {
    ns = 1:(n - 1)
    p_not_winning = ((ns + 1) ^ 2 - 1) / (ns + 1) ^ 2
    p_win = 1 / (n + 1) ^ 2
    prod(c(p_not_winning, p_win))
  }
}

# approximate infinite summation
print(
  sum(sapply(1:1000, pn))
)
# It returns 0.4995005
```

De hecho, no es necesario emplear R para resolver el problema. La fórmula de p_n se puede simplificar observando que los numeradores son del tipo $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$, por lo que

$$p_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{\cdot} n^2 \frac{1}{(n+1)^2},$$

$$p_n = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2},$$

por lo que, en general, los numeradores de cada fracción anulan uno de los denominadores de la anterior y siguiente fracción.

$$p_n = \frac{1 \cdot 3}{2^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{4}}{\cancel{3^2}} \cdot \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{5}}{\cancel{4^2}} \cdots \frac{\cancel{(n-1)(n+1)}}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2n(n+1)}$$

. Finalmente,

$$\text{Probabilidad de ganar} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

El sumatorio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es famoso, y puede resolverse notando que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \ldots.$$

Todos los términos se cancelan entre sí con la excepción del 1, por lo que finalmente

$$\text{Probabilidad de ganar} = \frac{1}{2},$$

tal y como hayamos con R.

27. La probabilidad de que gane el equipo "A" un partido es 1/4. Desgraciadamente, solo has podido enterarte del resultado del partido a través de Fermat: Fermat dice que ha ganado el equipo "A". El problema es que Fermat miente con probabilidad 1/3. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente haya ganado "A" si Fermat lo dice?

Solution: 2/5.

28. [Ross, 3.47] Sean *A, B, C* eventos tales que $P(A) = .2$, $P(B) = .3$, $P(C) = .4$. Calcula la probabilidad de que ocurra al menos un evento de A o B si:

    (a) A y B son mutuamente excluyentes.

    (b) A y B son independientes.

    Calcula la probabilidad de que ocurran los eventos *A, B, C* si

    (c) A, B, y C son independientes.

    (d) A, B y C son mutuamente excluyentes.

Solution: (a) 1/2 (b) 0.44 (c) 0.024 (d) 0.

29. [Dobrow, 1.41] Calcula mediante simulaciones la probabilidad de obtener exactamente una cara en cuatro lanzamientos de una moneda.

Solution: 1/4

30. [Dobrow, 1.42] Calcula matemáticamente y mediante simulaciones la probabilidad de obtener un número entero entre 1 y 5000 que sea divisible por 4, 7, o 10.

Solution: 0.4

31. [Dobrow, 1.43] Calcula matemáticamente y con simulaciones cuál es la probabilidad de obtener al menos un 8 en la tirada de dos dados (es decir, que la suma de ambos dados ≥ 8).

Solution: 15/36

32. [Dobrow, 1.45] Lee la ayuda del comando *sample*. Imagínate un dado de 4 lados cargado, de forma que toma los valores $1, 2, 3, 4$ con probabilidades $0.1, 0.2, 0.3, 0.4$.

33. Tenemos n sillas y k personas ($1 < k \leq n$) se sientan al azar en estas n sillas (se sobreentiende que todas las personas se sientan en sillas distintas). Razonar cuál es la probabilidad de que las k personas estén sentadas juntas. *Pista*: piensa en como programarías un método sencillo que generase simulaciones de los casos totales y los casos favorables; por ejemplo, una simulación de los casos favorables podría ser $\underline{\quad}\ \underline{X}\ \underline{X}\ \underline{X}\ \underline{\quad}$, donde $\underline{X}$ simboliza un sitio ocupado y $\underline{\quad}$ un sitio libre. Resuelve el problema analíticamente y mediante simulaciones.

Solution: $\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}$

34. Calcula matemáticamente y con simulaciones las siguientes probabilidades, relacionadas con una baraja francesa (4 palos de 13 cartas cada uno). Considera que una mano consiste en 5 cartas.
    (a) Un póker (4 cartas del mismo valor)
    (b) Un full (un trío y una pareja de cartas del mismo valor).
    (c) Un trío (Ojo con los pókers y los fulls).
    (d) Una escalera (cinco cartas de valores consecutivos). Se admite que el as vaya antes del dos o después del rey.
    (e) Una escalera de color (cinco cartas del mismo palo y valores consecutivos).

    ¿Tienen sentido las puntuaciones del póker?

Solution: (a) $\approx 2.4 \cdot 10^{-4}$ (b) $\approx 1.4 \cdot 10^{-3}$ (c) $\approx 2.11 \cdot 10^{-2}$ (d) $\approx 3.9 \cdot 10^{-3}$ (e) $\approx 1.5 \cdot 10^{-5}$

35. (a) Demuestra, usando los 3 axiomas de Kolmogorov y los corolarios derivados que, para dos sucesos A y B se tiene $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$.
    (b) Indica si se puede simplificar de alguna forma el resultado si los sucesos A y B son independientes. (Nota: puedes hacer este apartado sin haber completado (a)).
    (c) Indica si se puede simplificar de alguna forma el resultado si los sucesos A y B son mutuamente excluyentes. (Nota: puedes hacer este apartado sin haber completado (a)).

36. (a) Tu vecino acaba de tener dos bebés. De alguna forma, te enteras de que uno de sus bebés es una niña. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro bebé también sea niña?
    (b) Otro de tus vecinos acaba de tener dos bebés. El vecino acuerda visitarte con uno de sus bebés. Para ello, elige a uno de los bebés al azar y se lo lleva consigo a la visita. El bebé resulta ser una niña. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro bebé también sea niña? (Pista: el resultado no es el mismo que en (a) por la elección del bebé).

37. En un torneo de baloncesto participan 20 equipos con los que se forman 2 grupos de 10 equipos cada uno. Entre estos equipos hay 4 mucho mejores que los demás.
    (a) Calcula la probabilidad de que 2 de los mejores estén en un grupo y los otros 2 en el otro. Resuelve el problema matemáticamente y con simulaciones.
    (b) Calcula la probabilidad de que los 4 mejores se encuentren en el mismo grupo. Resuelve el problema matemáticamente y haciendo simulaciones en R.

Solution: a) En primer lugar, asumimos que realizamos el sorteo para el grupo A (una vez sorteemos los equipos para un grupo, los equipos del otro grupo quedan automáticamente determinados). A continuación, elegimos 2 equipos "buenos" entre los 4 posibles para dicho grupo. Finalmente, completamos el grupo eligendo 8 equipos "malos" entre los 16 disponibles. Por tanto:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{8} / \binom{20}{10}$$

Con simulaciones:

```
# G: Good, B: Bad
teams = c(paste0("G", 1:4), paste0("B", 1:16))

N = 10000
```

```
events = replicate(N, {
  group_A = sample(teams, 10)
  sum(startsWith(group_A, "G")) == 2
})
sum(events) / N
# you may compare it with analytical formula
choose(4, 2) * choose(16, 8) / choose(20, 10)
```

b) En este caso, en primer lugar debemos decidir cuál de los dos grupos va a tener a todos los equipos buenos (2 opciones). A continuación, dado que ya sabemos que hay cuatro equipos buenos en dicho grupo, basta elegir 6 equipos malos entre los restantes:

$$2 \cdot \binom{16}{6} / \binom{20}{10}$$

Con simulaciones:

```
# G: Good, B: Bad
teams = c(paste0("G", 1:4), paste0("B", 1:16))

N = 10000
events = replicate(N, {
  group_A = sample(teams, 10)
  good_in_A = sum(startsWith(group_A, "G"))
  (good_in_A == 0) || (good_in_A == 4)
})
sum(events) / N
# you may compare it with analytical formula
2 * choose(16, 6) / choose(20, 10)
```

38. En un laboratorio se analiza a un grupo de personas de las cuales se sabe que el 5% de las cuales tienen la enfermedad de Hansen. La prueba detecta la enfermedad de Hansen al 98% de las personas que padecen la enfermedad, pero da falsos positivos al 3% de las que no la padecen. ¿Cuál es la probabilidad de que alguien que dé positivo en la prueba de la enfermedad de Hansen la tenga realmente?

Solution: 0.632

39. Se colocan al azar h bolas iguales en k urnas ($h > k$) numeradas del 1 al k. Razona cuál es la función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias U_1, U_2, ..., U_k; siendo U_i el número de bolas en la urna i-ésima. (Pista: al pedirse la distribución conjunta el problema no es un reparto).

Solution: Podemos imaginarnos que tenemos h rayas (las bolas) y que a cada una de ellas hay que asignarle una urna. Representando cada urna como un número, para los casos favorables sabemos que habrá h_1 1s, h_2 2s, etc. Como queremos ordenar h objetos sabiendo que hay varias clases de objetos idénticos, el patrón adecuado es permutaciones con repetición. Los casos totales se deducen fácilmente por el método constructivo, siendo el patrón adecuado las variaciones con repetición. Por tanto:

$$P(U_1 = h_1, U_2 = h_2, \ldots, U_k = h_k) = \frac{\frac{h!}{h_1!h_2!,\ldots h_k!}}{k^h}.$$

40. La primitiva consta de 49 números de los cuales, el día del sorteo, se eligen 7 distintos: 6 de la combinación ganadora y el “complementario”. En un boleto se pueden realizar apuestas múltiples marcando r de los 49 números. (a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar k números de la combinación ganadora? (b) ¿Cuál es la probabilidad de acertar k y el “complementario”? (c) ¿Cuál es la probabilidad de acertar k y no acertar el complementario?

Solution: (a) $\frac{\binom{r}{k}\binom{49-r}{6-k}}{\binom{49}{6}}$ (b) $\frac{\binom{r}{k}\binom{r-k}{1}\binom{49-r}{6-k}}{\binom{49}{6}43}$ (c) $\frac{\binom{r}{k}\binom{49-r}{6-k}(43-r+k)}{\binom{49}{6}43}$

41. En el ascensor de un edificio con bajo y 10 plantas entran en el bajo cuatro personas. Cada persona se baja independientemente de donde se bajen las demás y con igual probabilidad en cada planta. Calcula la probabilidad, analíticamente y mediante simulaciones, de que:

(a) Las cuatro personas se bajen en la décima planta.
(b) Las cuatro personas se bajen en la misma planta.
(c) Las cuatro se bajen en plantas distintas.

Solution: (a) 10^{-4}, (b) 10^{-3}, (c) 63/125

42. Una lotería está formada por n números, de los cuales m tienen premio. Si una persona tiene k números, calcula la probabilidad de que le toque al menos un premio.

Solution: $1 - \frac{(n-m)!(n-k)!}{n!(n-m-k)!}$.

43. En un proceso de fabricación un lote de 100 piezas contiene 30 piezas defectuosas. Se selecciona sin reemplazamiento una muestra de 10 piezas. ¿Cuál es la probabilidad de que 4 de ellas sean defectuosas?

Solution: ≈ 0.2076

44. Cuatro furgonetas que transportan mercancías distintas deben hacer sus entregas en cuatro destinos distintos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una entrega sea correctas si se realiza el reparto al azar? Resuelve el problema analíticamente y con simulaciones en R.

Solution: 15/24

45. Diez personas van seleccionando según un turno establecido una carta de oros al azar y con reemplazamiento. El juego finaliza cuando sale el as y se continúa, hasta que alguien gane, repitiendo rondas en el orden establecido. Calcula la probabilidad de que el juego continue después de dos rondas. Pista: usa probabilidades condicionales para calcular la probabilidad de que ”el as no haya salido tras n extracciones” en función de los resultados anteriores; luego usa R para realizar los cálculos.

Solution: 0.1215.

46. Un jurado de tres personas tiene tres miembros. Dos de ellos son “serios”, con probabilidad p de tomar la decisión correcta. El tercer miembro del jurado es un “troll”, por lo que lanza una moneda para tomar su decisión. El veredicto final se hace por mayoría. Un jurado de una sola persona tiene probabilidad p de tomar la decisión correcta. ¿Qué jurado tiene más probabilidades de tomar la decisión correcta (el de tres personas o el de una sola persona)?

Solution: La probabilidad es exactamente la misma en ambos casos: p.

Fuentes

- [Ross]: Ross, Sheldon M. Introduction to probability models. Academic press, 2014.
- [Dobrow]: Dobrow, Robert P. Probability: with applications and R. John Wiley & Sons, 2013.
- [Spiegel]: Spiegel et at. Probabilidad y estadística, Schaum, segunda edición, 2003.