Curso 2021/22

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

PROBLEMAS. Hoja 4

1. Sea un método Runge-Kutta explícito de s pasos con tablero de Butcher c, A, b (la matriz A satisface $a_{ij} = 0$ cuando $j \geq i$).

- Definir la función incremento $\phi_f(t_n, y_n; h)$.
- Probar las tres hipótesis (H_{MN}) para dicha función.
- Probar que satisface el criterio de la raíz.
- Probar cuándo verifica las dos condiciones de consitencia.

2. Sea un método Runge-Kutta implícito (RKI) de s pasos con tablero de Butcher c, A, b (la matriz A satisface $a_{ij} \neq 0$ para algún $j \geq i$).

- Demostrar que si existe k punto fijo, $k = F_1(k)$, entonces existe ξ tal que $\xi = F_2(\xi)$ (y el recíproco) donde F_1 y F_2 se definen por las dos siguientes columnas:

$$\begin{array}{l|l} k_1 = f(t_n + c_1 h, y_n + h \sum\limits_{j=1}^{s} a_{1j} k_j) & \xi_1 = y_n + h \sum\limits_{j=1}^{s} a_{1j} f\left(t_n + h c_j, \xi_j\right) \\ \quad \cdots\cdots & \quad \cdots\cdots \\ k_s = f(t_n + c_s h, y_n + h \sum\limits_{j=1}^{s} a_{sj} k_j) & \xi_s = y_n + h \sum\limits_{j=1}^{s} a_{sj} f\left(t_n + h c_j, \xi_j\right) \end{array}$$

- Definir la función incremento $\phi_f(t_n, y_n; h)$ del RKI.
- Probar las hipótesis (H_{MN}) para dicha función.
- Probar que satisface el criterio de la raíz
- Probar cuándo verifica las dos condiciones de consitencia.

3. Sea un método Runge-Kutta explícito de 2 pasos:

$$k_1 = f(t_n, y_n), \qquad k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1), \qquad y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2).$$

a) Identificar las condiciones que han de verificar los coeficientes para que el orden de consistencia (orden de cuadratura) sea 2.

b) Probar que no pueden ser de orden 3 (**Barrera**).

4. Dado un PVI podemos escribirlo como un un problema autónomo considerando una nueva función vectorial $Z(t) = (t, Y(t))$. Así, se satisface la EDO $Z'(t) = F(Z(t)) = (1, f(t, Y(t)))$. Demostrar que para que la solución numérica de un método Runge-Kutta

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

5. Obtener por el método de colocación el método Runge-Kutta con nodos (o parámetros de colocación) $c_1 = 1/4$ y $c_2 = 1$.

- Es un método implícito?
- Qué orden tiene?
- Cuál es su función de estabilidad? Es A-estable?

6. Sea un método Runge-Kutta explícito de 3 pasos.

a) Identificar las condiciones que han de verificar los coeficientes para que el orden de consistencia (orden de cuadratura) sea 2.

b) Bajo la condición (CS) demostrar que las condiciones para que sea de orden 3 son:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1, \qquad b_2c_2 + b_3c_3 = \frac{1}{2}, \qquad b_2c_2^2 + b_3c_3^2 = \frac{1}{3}, \qquad b_3a_{32}c_2 = \frac{1}{6}.$$

c) Probar que no pueden ser de orden 4 (**Barrera**).

7. Demostrar que para un método Runge-Kuta de s pasos sea de orden p al menos debe verificar las siguientes condiciones

$$m! \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{s} b_{j_1} a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \cdots a_{j_{m-1} j_m} = 1, \qquad m = 1, \ldots, p.$$

Para demostrarlo utilizar que el PVI $Y' = Y$ en $[0,1]$ con $Y(0) = 1$ su solución es $Y(t) = e^t$.

8. **Primera barrera de Butcher**. Utilizando el ejercicio anterior demostrar que un método Runge-Kutta explícito de s pasos no puede tener orden mayor que s.

9. **No todos los métodos Runge-Kutta implícitos son A-estables**. Estudiar la estabilidad y orden del método cuyo tablero es

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

10. Si un método Runge-Kutta tiene orden de consistencia p entonces su función de estabilidad satisface

$$R(z) = 1 + z + \cdots + \frac{z^p}{p!} + O(|z|^{p+1}).$$

Para verlo considerar el PVI

$$y' = \lambda y, \qquad t \in [0, T], \qquad y(0) = 1,$$

y utilizando el método RK, $y_1 = R(\lambda h) y_0$, donde R es la función de estabilidad del método.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.