

HOJA DE EJERCICIOS 9  
Análisis Matemático.  
CURSO 2021-2022.

---

**Problema 1.** Calcula el “pull-back”  $f^*\omega$  para cada una de las siguientes formas  $\omega$  y funciones  $f$ :

- a)  $f : \mathbb{R}_u^2 \rightarrow \mathbb{R}_x^3, f(u_1, u_2) = (u_1^2, u_2^2, e^{u_1 u_2}), \omega = x_2 dx_1 + (x_1 - x_2 - x_3) dx_2 - dx_3.$
- b)  $f : \mathbb{R}_{uv}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xyz}^3, f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, e^u), \omega = (x^2 - y^2) dx \wedge dy - 3(x^2 + y^2) dy \wedge dz.$
- c)  $f : \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_{xyz}^3, f(t) = (\cos t, \sin t, t), \omega = (x^2 + y^2 + z^2) dx + (x - \cos z) dy + (x^2 + y^2 - 1) dz.$
- d)  $f : \mathbb{R}_{xy}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xy}^2, f(x, y) = (ax - by, bx + ay), a, b$  constantes,  $\omega = x dy - y dx.$
- e)  $f : \mathbb{R}_{r\theta}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xy}^2, f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \omega = dx \wedge dy.$
- 

**Problema 2.** Comprueba directamente que  $\phi^* d\omega = d(\phi^*\omega)$ :

$$\phi(u, v) \equiv (e^u, u^3 v, u \sin v) \quad , \quad \omega = z dx \wedge dy + xy dz \wedge dx + (y - z) dy \wedge dz .$$

---

**Problema 3.** Sean abiertos  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $U' \subseteq \mathbb{R}^s$ . Sean  $f : U \rightarrow U'$  al menos de clase  $C^2$  y  $\omega$  una forma diferencial en  $U'$ .

- a) Demuestra que si  $\omega$  es cerrada entonces  $f^*\omega$  es también cerrada.
- b) Demuestra que si  $\omega$  es exacta entonces  $f^*\omega$  también es exacta.
- 

**Problema 4.** Para cada una de las siguientes formas de Pfaff decide si es exacta y, en caso afirmativo, encuentra un **potencial**, es decir una función escalar  $h$  tal que  $\omega \equiv dh$ .

- a)  $\omega = (x + y) dx + (y - x) dy$  en  $\mathbb{R}^2$ .
- b)  $\omega = y \cos(yz) dx + (x \cos(yz) - xyz \sin(yz) + 2yz) dy + (y^2 - xy^2 \sin(yz)) dz$  en  $\mathbb{R}^3$ .
- 

**Problema 5.** Halla una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de tal manera que la forma  $\omega = x^2 y dx + f(x) dy$  sea exacta en  $\mathbb{R}^2$ .

---

**Problema 6.** Determina la constante  $a$  para que la siguiente 2-forma en  $\mathbb{R}^3$  sea cerrada:

$$\omega = (1 + a z e^{yz}) dx \wedge dy + (1 - y e^{yz}) dx \wedge dz + (2y + z + \sin z) dy \wedge dz$$

Para ese valor de  $a$ , halla una 1-forma  $\eta$  tal que  $\omega = d\eta$  ¿Existe  $\eta$  para otros valores de  $a$ ?

---

**Problema 7.** (a) Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto, en el que tenemos una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  al menos de clase  $C^1$ . Si  $\phi(t) : [a, b] \rightarrow U$  es un camino al menos  $C^1$ , demuestra la igualdad:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

---

**Problema 8.** En cada caso, dibuja la imagen  $\phi(R)$ , de la región  $R$  que se indica, y calcula  $\int_{\phi(R)} \omega$ :

a)  $\phi(u, v) \equiv (\cos u, \sin u, v)$ ,  $R = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ ,  $\omega = x^3 dz \wedge dx$ .

b)  $\phi(u, v) \equiv (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ ,  $R = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)$ ,  $\omega = z dx \wedge dy$ .

---

**Problema 9.** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  un abierto. Para cada campo de vectores  $\mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, F_3)$  definido en  $U$ , consideramos las construcciones  $\mathbf{F}^b$  y  $\mathbf{F}^d$  del problema 12 de la hoja 8. Consideramos también los operadores:

$$d_{1 \rightarrow 2} : \{1\text{-formas en } U\} \rightarrow \{2\text{-formas en } U\}, \quad d_{2 \rightarrow 3} : \{2\text{-formas en } U\} \rightarrow \{3\text{-formas en } U\},$$

dados por las respectivas derivadas exteriores. Demuestra las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}(\nabla f)^b &= df, \\d_{2 \rightarrow 3}(\mathbf{F}^d) &= (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \\d_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}^b) &= (\operatorname{rot} \mathbf{F})^d.\end{aligned}$$

---

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70