**DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA**
**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**
**Analisis de Variable Real. Curso 13–14.**
**Sucesiones y series de funciones. Hoja 10**

**207** *Sea $D \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$ el conjunto de todas las funciones $f : D \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) acotadas.*
*i) Probar que $V = \mathcal{L}^\infty(D, \mathbb{K})$es un espacio vectorial y que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)|$ es una norma en $V$.*
*ii) Usar el problema 45 para construir la métrica en $V$ $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$. Describir una bola y describir las sucesiones convergentes a cero en esa métrica.*
*iii) Probar que la convergencia en $d_\infty$ es la convergencia uniforme.*

**208** *Sea $D \neq \emptyset$ y $f_n : D \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) una sucesión de funciones que converge uniformemente a $f : D \to \mathbb{K}$.*
*i) Si las funciones $f_n$ son acotadas, probar que $f$ es acotada.*
*Recíprocamente, si $f$ es acotada probar que, excepto quizas una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$, todas las funciones $f_n$ son acotadas.*
*En cualquiera de los dos casos anteriores probar que de hecho existe una consntante $M > 0$ tal que*

$$\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n(x)|,\ x \in D\} \leq M$$

*para todo de $n \in \mathbb{N}$, excepto quizás una cantidad finita.*
*ii) En la situación anterior supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $g : [-M, M] \to \mathbb{R}$ es continua. Concluir que $g \circ f_n$ converge uniformemente a $g \circ f$.*
*iii) Si $D$ es un espacio métrico y $f$ es continua y $x_n \to x$ en $D$ probar que $f_n(x_n) \to f(x)$.*
*Poner ejemplos de que esto es falso si $f$ no es continua o si sólo hay convergencia puntual.*

**209** *Consideremos en el espacio vectorial $V = C([0, 1])$ la magnitud*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

*i) Probar que $\|\cdot\|_1$ es una norma, describir una bola para la métrica $d_1(f, g) = \|f - g\|_1$ y describir las sucesiones convergentes a cero en esa métrica.*
*ii) Probar que si $f_n \to f$ en $d_1$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\ dt.$$

*iii) Probar que si $f \in V$ tenemos que $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. ¿Qué implica esto respecto de la convergencia uniforme de funciones?.*
*iv) Construir una sucesion de Cauchy en $V$ para $d_1$ que no converge a una función continua.*
**Indicación:** *Construir una sucesion de funciones continuas que, cuando $n \to \infty$, desarrolla un salto en $t_0 = 1/2$.*



*vii)* $f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, -\frac{1}{n}] \\ nx & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{n}, \infty) \end{cases}$ *en $(0, 1)$, $(-3, -1)$ y en $\mathbb{R}$.*

**212** *Calcular*

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^2 e^{-nx^2}\,dx$$

**213** *Supongamos que* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|<\infty$. *Probar que si* $a_0\in\mathbb{R}$ *entonces*

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen}(nt)$$

*define una función continua en* $\mathbb{R}$ *y que además es* $2\pi$*–periódica, es decir* $f(t)=f(t+2\pi)$ *para todo* $t\in\mathbb{R}$.

*Dar condiciones sobre los coeficientes* $a_n,b_n$ *para que* $f$ *sea de clase* $C^1$, *o clase* $C^2$, *o clase* $C^k$, $k\in\mathbb{N}$. *Probar que todas esas derivadas son* $2\pi$*–periódicas.*

**214** *Probar que* $V=\{f\in C([0,1]),\ \int_0^1 f(t)\,dt=0\}$ *es un subespacio vectorial cerrado del espacio vectorial métrico* $(C([0,1]),d_\infty)$.

*Idem si* $V=\{f\in C([0,1]),\ \int_0^1 f(t)g(t)\,dt=0\}$ *siendo* $g$ *una función continua dada.*

**215** *Estudiar la convergencia puntual y encontrar intervalos de* $\mathbb{R}$ *en los que la convergencia sea uniforme*
*i)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n^2}$, *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(t)}{(1+\operatorname{sen}(t))^n}$

**216** *Calcular* $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/2}^1 f_n(t)\,dt$ *siendo* $f_n(t)=\frac{e^t-1}{e^{nt}}$.

**217** *Supongamos que la serie de potencias* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, *con* $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$ *tiene radio de convergencia* $R>0$.

*Probar que* $f$ *es par si y sólo si* $a_{2j+1}=0$, $j=0,1,2\ldots$ *y que* $f$ *es impar si y sólo si* $a_{2j}=0$, $j=0,1,2\ldots$.

**218** *Usando el Problema 138 probar que no existe una cota superior uniforme de todas las derivadas de* $f(t)=\begin{cases}e^{-1/t^2} & si\ t\neq 0\\ 0 & si\ t=0\end{cases}$ *en ningun intervalo que contenga a* $t=0$.

**219** *Encontrar el disco de convergencia de las series de potencias* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, *con* $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$ *y* $x_0\in\mathbb{R}$
*i)* $a_n=\binom{2n}{n}$, $x_0=2$, *ii)* $a_n=\frac{2^n}{n^2}$, $x_0=i$, *iii)* $a_n=\frac{3^n}{n4^n}$, $x_0=-1$, *iv)* $a_n=\frac{(-1)^n}{n^24^n}$, $x_0=0$, *v)* $a_n=\tan(\frac{a}{2^n})$, $x_0=0$, *vi)* $a_n=\frac{\ln(n)}{n}$, $x_0=2i$

**220** *Obtén un desarrollo en serie de potencias centrada en* $x_0=0$ *para las siguientes funciónes*
*i)* $x\cos(x)$, *ii)* $\sin(t^2)$, *iii)* $z^3e^{2z}$, *iv)* $\operatorname{senh}(t)+2\cos(3t)$, *v)* $(x+2)e^x$ *vi)* $F(t)=\int_0^t e^{-s^2}\,ds$, *vii)* $\frac{1}{x-1}+x^2\operatorname{sen}(3x)$.