1. Convierte los siguientes números decimales a binarios: **a**. 267 **b**. $3'125$ **c**. $\frac{1}{6}$ **d**. $\frac{1}{7}$

2. Halla las expresiones binarias de las expresiones decimales $0'4$, y $0'8$.

3. Halla el número racional correspondiente a la fracción binaria infinita $x = 0'011011\overline{011}_{(2}$

4. Convierte a decimal y a binario los siguientes números hexadecimales: **a.** 1F$'$A, **b.** DD...D (n veces D), **c.** $0'$BBBB...

5. Convierte los siguientes números decimales a hexadecimales: **a**. 130 **b**. $0'2$ **c**. $3'9$

6. Escribe en base 3: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{16}$.

7. Pasa $0'3\overline{8}_{(10}$ a base 2.

8. Halla las fracciones representadas por: $0'12\overline{02}_{(3}$ y $0'\overline{11011}_{(2}$.

9. Acota superiormente el error absoluto y el error relativo y encuentra el número de decimales correctos y el número de cifras significativas correctas en las siguientes aproximaciones de x por $\tilde{x}$:
a. $x = 28'245$, $\tilde{x} = 28'271$ **b**. $x = e$, $\tilde{x} = \frac{19}{7}$ **c**. $x = \sqrt{2}$, $\tilde{x} = 1'414$

10. Suma manualmente los 20 primeros términos de las series

$$\textbf{a.}\ \sum_{n=1} \frac{1}{n} \qquad \textbf{b.}\ \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} \qquad \textbf{c.}\ \sum_{n=0} \frac{1}{2^n}$$

primero de menor a mayor y después de mayor a menor, utilizando mantisa de 3 cifras en cada paso.

11. Se sabe que 10000 aproxima a x con |error absoluto| $< \epsilon$. Demuestra que $\frac{1}{10000}$ aproxima a $\frac{1}{x}$ con

$$|\text{error absoluto}| < \frac{\epsilon}{(10000-\epsilon)^2}.$$

En el caso de $\epsilon = 1$ decir con cuántos decimales correctos aproxima $\frac{1}{10000}$ a $\frac{1}{x}$.

12. Demuestra que si el número conocido $\tilde{x}$ aproxima al desconocido x con $|x - \tilde{x}| < \epsilon$, entonces $\frac{1}{\tilde{x}}$ aproxima a $\frac{1}{x}$ con

$$|\text{error relativo}| < \frac{\epsilon}{|\tilde{x}|}.$$

Observa que si x y $\tilde{x}$ son como en el apartado anterior y f es una función derivable entonces el error en $f(\tilde{x})$ se puede estimar por $f'(\tilde{x})\epsilon$.

13. Calcula los polinomios de Taylor de grado 3 en los casos siguientes y representa gráficamente (usa un programa de representación gráfica de funciones; MatLab, por ejemplo) tanto la función dada como los polinomios de Taylor calculados: **a.** $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ **b.** $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $a = \frac{\pi}{4}$ **c.** $f(x) = e^{\cos(x)}$, $a = 0$ **d.** $f(x) = \log(1 + \cos(x))$, $a = 0$

14. Halla los polinomios de Taylor de grado n en torno al origen de las funciones siguientes:

$$\textbf{a.}\ \frac{1}{1+x^2} \qquad \textbf{b.}\ \arctan x \qquad \textbf{c.}\ \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad \textbf{d.}\ \log\frac{1+x}{1-x}$$

Escribe para cada una de ellas una fórmula para el resto.

15. Sea $p_{2n-1}(x)$ el polinomio de Taylor de grado $2n-1$ de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el punto $x = 0$. ¿Cómo debes elegir n para que

$13+\sqrt{168}$

17. Calcula $I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx$ con una precisión de 10^{-6}, reemplazando e^x por una aproximación con su polinomio de Taylor en $x = 0$ más su resto.

18. Sea
$$g(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t)}{t}\, dt.$$
a. Escribe el polinomio de Taylor de $g(x)$ en $x = 0$.
b. Acota superiormente el error que se produce al aproximar g por su polinomio de Taylor de grado n cuando $|x| \leq \frac{1}{2}$.
c. Encuentra n para que el polinomio de Taylor de grado n que aproxima a g tenga un error inferior a 10^{-7} en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

19. (**Programa**) Comenzando con $x_0 = \pi, x_1 = \pi$ define $x_{n+2} = 4x_n - 3x_{n+1}, n = 0, 1, \cdots$. Haz un programa que produzca los 30 primeros términos de esta serie. ¿Observas alguna anomalía?

20. Usa los polinomios de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ y de $\cos(x)$ en $x = 0$ para mostrar que $3\operatorname{sen}(x) - x\cos(x) \approx 2x$; y que por tanto,
$$x \approx \frac{3\operatorname{sen}(x)}{2 + \cos(x)} \ .$$
Encuentra el error que se comete en la aproximación y úsala para encontrar el valor de π con cuatro decimales correctos.

21. Usa la fórmula de Machin (1706)
$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$
para calcular el valor de π con diez cifras decimales correctas. (El valor de π con diez decimales correctos es: 3'14159265359.)

22. En una importante tableta cuneiforme, la YBC7289, aparece $\sqrt{2}$, en notación sexagesimal, como $\sqrt{2} = 1; 24, 51, 10$, donde el *punto y coma* separa la parte entera de la fraccionaria y las cantidades que aparecen separadas por *comas* son los sucesivos restos modulo 60 (sexagesimal). Comprueba hasta que punto el resultado es correcto.
Usa la serie del binomio
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \text{donde} \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$
para calcular $\sqrt{2}$ con cuatro decimales correctos.
Compara y comenta los dos resultados anteriores.

23. Dado un triángulo ABC suponemos que α es el ángulo que forman los lados b, c (opuestos a los vértices B, C respectivamente). Si b, c se miden exactamente pero α tiene un error $\Delta\alpha$, $|\Delta\alpha| < \delta$, ¿con qué error obtenemos el valor del tercer lado a? ($a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$).

24. Para calcular la exponencial tenemos las siguientes fórmulas:
$$(1) \qquad e^x = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}\right),$$
$$(2) \qquad e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$
Suponiendo x positivo se tienen las acotaciones (que no es necesario que pruebes):
$$\frac{x^2}{2n} < e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \frac{x^2 e^x}{2n}.$$
Se desea hallar $e^{1/10}$ con un error absoluto menor que $\frac{1}{2}10^{-8}$. ¿Cuánto ha de valer m en (1)? ¿Cuánto ha de valer n en (2)? ¿Qué fórmula es mejor para evaluar la exponencial?