

ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
CURSO 2015-2016
HOJA 2

1. Resuelve las ecuaciones diferenciales siguientes:

- a) $4yy' + x = 0$.
- b) $x dx + y dy = 0$.
- c) $y' \cos x = (\sin x + x \sec x) \cotg y$.
- d) $y' \sqrt{x^2 + 1} = xe^{-y}$.
- e) $(xy^2 - y^2 + x - 1) + (x^2y + x^2 - 2xy - 2x + 2y + 2)y' = 0$.
- f) $y' = (x - y)^2 + 1$.

2. Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales:

- a) $y' - y = y^2, \quad y(0) = 0$.
- b) $y' = \frac{y^2 + 1}{x^2}, \quad y(1) = \sqrt{3}$.
- c) $\frac{(u^2 + 1) dy}{y} = u du, \quad y(0) = 2$.

3. Resuelve la ecuación diferencial

$$x^2y^2 + 1 + 2x^2y' = 0$$

mediante la sustitución $xy = z$.

4. Demuestra que la ecuación

$$y' = x^{n-1}f(y + ax^n)$$

se transforma en una ecuación de variables separables haciendo el cambio

$$u(x) = y(x) + ax^n.$$

Utiliza el método anterior para resolver la ecuación

$$y' = 2x(y + x^2)^2.$$

5. Integra la ecuación diferencial

$$(e^x + 1)yy' = e^x$$

y encuentra la solución particular que pasa por $(0, 0)$.

6. Halla la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' \sen x = y \log y$$

que satisface la condición inicial $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.

7. Un coche de masa m viaja a una velocidad v_0 cuando de repente tiene que frenar. Los frenos ejercen una fuerza constante k hasta que el coche se para. ¿Cuánto tarda el coche en detenerse y qué distancia recorre antes de hacerlo?

8. Demuestra que la curva plana que posee la propiedad de que todas sus normales pasan por un punto fijo, es una circunferencia.

9. Halla la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es n veces mayor que la pendiente de la recta que une ese punto con el origen de coordenadas.

10. Inicialmente un cultivo tiene un número B_0 de bacterias. Al cabo de una hora se determina que el número de bacterias es $\frac{3}{2}B_0$. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias $B(t)$ presentes en el tiempo t , calcula el tiempo necesario para que se triplique el número de bacterias.

11. La población de rebecos de un parque nacional era de 2900 en 1995 y 3700 en 2005. Los conservadores del parque quieren hacer una estimación de la población de rebecos en el año 2025, supuesto que la población se rige por el modelo de crecimiento maltusiano. ¿Cuál será dicha estimación?

Conservadores expertos consideran, dado el tamaño del parque y su situación, que la capacidad de soporte de la población de rebecos es de 8000 individuos. Si suponen que la población se rige por el modelo logístico de crecimiento ¿cuál será su estimación de la población en 2025?

12. Una muestra de madera de un yacimiento arqueológico contiene, por unidad de masa, un 75 % de la cantidad de carbono-14 que contiene una trozo de madera viva. ¿Cuál es la edad aproximada de la muestra de madera?

13. El potasio-40 es un isótopo radiactivo cuya vida media es de 1250 millones de años y que al desintegrarse se convierte en un átomo de argón-40 y otras partículas. Al analizar una muestra de una roca se observó que contenía 8 veces más átomos de potasio-40 que de argón-40. Supuesto que el argón-40 únicamente provenía de la desintegración del potasio-40 ¿cuánto tiempo había pasado desde que la roca sólo contenía potasio-40 hasta que se realizó el análisis?

14. La temperatura T de un cuerpo rodeado por aire a temperatura T_0 varía de modo que el ritmo de variación de su temperatura es proporcional a la diferencia de temperaturas $T - T_0$ (ley del enfriamiento de Newton). Un cuerpo que inicialmente está a 120°C se pone en contacto con aire a 20°C . Al cabo de una hora, su temperatura es de 70°C . ¿Cuánto tiempo más tiene que transcurrir para que la temperatura del cuerpo baje a 40°C ?

15. Un estudiante invita a sus amigos a ver un partido de fútbol en su casa. Quiere tener unas latas de cerveza listas para beberlas con sus amigos cuando estos lleguen a las 8 de la tarde. De acuerdo con su gusto la cerveza se ha de tomar a 10°C . Su experiencia le dice que si la temperatura de las latas cuando las introduce en la nevera es de 27°C y mantiene esta a una temperatura constante de 4°C , al cabo de una hora las cervezas se encuentran a 16°C . ¿A qué hora ha de introducir las cervezas en la nevera para garantizar que estén listas cuando lleguen sus amigos?

16. Justo antes del mediodía el cuerpo de una persona fue hallado, aparentemente víctima de un homicidio, en un cuarto acondicionado para mantener una temperatura constante de 21°C . Al mediodía la temperatura del cuerpo era $26,6^\circ\text{C}$ y a la 1 de la tarde $23,8^\circ\text{C}$. Si se supone que la temperatura del cuerpo en el momento del óbito era de 37°C y que se enfrió de acuerdo con la ley de Newton. ¿Cuál fue la hora del crimen?

17. Resuelve las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$.

b) $4y(x^2 + 3y^2) dx = x(x^2 - 6y^2) dy$.

c) $(x^2 + y^2) dx = x(x + y) dy$.

18. Integra la ecuación diferencial

$$(1 - x^2y^2)y' = 2xy^3$$

mediante un cambio de variable del tipo $y = z^\alpha$ que la transforme en homogénea.

19. Halla las curvas que poseen la propiedad de que la distancia del origen de coordenadas a cualquier recta tangente es igual al valor absoluto de la abscisa del punto de tangencia.