

TEORÍA DE GALOIS

Hoja 4. El Teorema Fundamental de la Teoría de Galois.

Recuerda que una extensión E/K es Galois si es normal, finita y separable. Dado $f \in K[x]$, escribimos $E = K(f)$ para denotar al cuerpo de descomposición de f sobre K ; en tal caso diremos que el grupo de Galois de f sobre K es $\text{Gal}(E/K)$ y lo denotaremos por $G(f)$.

1. Sea E un cuerpo y $F \subset E$ su subcuerpo primo. Demuestra que todo automorfismo de E fija a F , en particular, $\text{Aut}E = \text{Gal}(E/F)$.

2. Calcula los siguientes grupos de Galois.

a) Prueba que $\text{Aut}\mathbb{Q} = \{\text{Id}\}$ y $\text{Aut}\mathbb{R} = \text{Gal}(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) = \{\text{Id}\}$.

b) Definimos $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\sigma(a + bi) = a - bi$. Prueba que $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1, \sigma\}$.

Sugerencia: para el primer apartado, observa que si $0 < x \in \mathbb{R}$ entonces $x = y^2$ y entonces para todo $f \in \text{Aut}\mathbb{R}$ se tiene que $x < y$ implica que $f(x) < f(y)$; después usa que entre dos números reales siempre hay un racional.

3. Sea $E = \mathbb{F}_p^n$, con p primo y $n \geq 1$, y sea $\varphi \in \text{Aut}E$ el automorfismo de Frobenius de E . Prueba que E/\mathbb{F}_p es una extensión Galois y que $\text{Gal}(E/\mathbb{F}_p) = \langle \varphi \rangle$. En particular, el grupo de Galois de la extensión E/\mathbb{F}_p tiene orden n .

4. Demuestra que la extensión $\mathbb{F}_3(t)/\mathbb{F}_3(t^3)$ no es Galois y que, en cambio, la extensión $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(t^3)$ es de Galois. Calcula el grupo de Galois de ambas extensiones.

5. Sea $f(x) = (x^3 - 2)(x^2 - 3) \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Calcula $E = \mathbb{Q}(f)$ y prueba que $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset E$.

b) Calcula el grado de E/\mathbb{Q} y E/L .

c) Calcula $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ y $\text{Gal}(E/L)$. ¿Qué relación existe entre estos grupos?

6. Sea $E = \mathbb{Q}(\xi)$ donde $\xi = e^{\frac{2\pi i}{7}}$. Muestra que E es una extensión de Galois de \mathbb{Q} . Encuentra todos los subcuerpos intermedios de la extensión E/\mathbb{Q} , los subgrupos de $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ que les corresponden y determina qué subcuerpos intermedios se corresponden con extensiones normales de \mathbb{Q} .

7. Sea ξ una raíz 11-ésima primitiva de la unidad en \mathbb{C} .

a) Construye la menor subextensión normal E de \mathbb{Q} que contiene a ξ .

b) Demuestra que el grupo de Galois de E/\mathbb{Q} es cíclico. Encuentra un generador y expresa todos los automorfismos de $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ en función de este generador.

c) ¿Cuántas subextensiones propias tiene $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$? ¿Qué grados tienen?

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

8. Sea E/K una extensión Galois con $G = \text{Gal}(E/K)$ un grupo cíclico de orden n . Demuestra que:
- Para cada divisor d de n existe exactamente un cuerpo intermedio L con $|E : L| = d$.
 - Si L_1 y L_2 son dos cuerpos intermedios, entonces $L_1 \subseteq L_2$ si, y solo si, $|E : L_1|$ divide a $|E : L_2|$.
 - Si la extensión E/K es sólo normal, ¿siguen valiendo los apartados anteriores?
9. Sea E el cuerpo de descomposición de $f(x) = x^p - 2$ sobre \mathbb{Q} , donde p es un primo.
- Demuestra que $E = \mathbb{Q}(\alpha, \xi)$ donde $\xi^p = 1$, $\xi \neq 1$ y $\alpha^p = 2$.
 - Demuestra que $|E : \mathbb{Q}| = p(p - 1)$.
 - Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid d \in \mathbb{F}_p^\times, c \in \mathbb{F}_p \right\} \leq \text{GL}(2, p)$. Prueba que $\text{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong H$.
 - Si $p = 5$, encuentra los subcuerpos de E fijados por los subgrupos de $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$.
10. Sea $f(x) = x^{12} - 3 \in \mathbb{Q}[x]$. Considera el cuerpo de descomposición E de f sobre \mathbb{Q} .
- Calcula $|E : \mathbb{Q}|$.
 - Prueba que $L = \mathbb{Q}(i) \subset E$ y, por tanto, E es el cuerpo de descomposición de f sobre L .
 - Calcula $[E : L]$ y concluye que f es irreducible sobre L .
 - Decide de manera razonada la clase de isomorfía de $\text{Gal}(E/L)$.
 - Calcula todas las subextensiones de E/L grado 3 sobre L .
 - Calcula todas las subextensiones de E/L de grado 4 sobre L .
11. Sea $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$. Calcula el grupo de Galois de f sobre \mathbb{Q} y los cuerpos fijos por sus subgrupos.
12. Sea $p(x) = x^4 - 2x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y $E = \mathbb{Q}(f)$.
- Calcula el grado de E/\mathbb{Q} .
 - Describe el grupo de Galois de la extensión E/\mathbb{Q} y determina su clase de isomorfía.
 - Encuentra todas las subextensiones de E/\mathbb{Q} grado 4 sobre \mathbb{Q} .
13. Sea $f = (x^2 - p)(x^2 - q) \in \mathbb{Q}[x]$ donde $p \neq q$ son primos. Determina la clase de isomorfía de $\text{Gal}(f)$.
14. Sea E/K una extensión de Galois con $\text{Gal}(E/K) \cong C_2 \times C_2$. Supongamos que la característica de K no es 2. Demuestra que existen $a, b \in E$ tales que $E = K(a, b)$ con $a^2, b^2 \in K$. ¿Qué sucede si la característica de K es 2 y suponemos cierta la conclusión?
15. Sea f un polinomio irreducible sobre \mathbb{Q} con el grupo de Galois abeliano y u una raíz de f en \mathbb{C} . Demuestra que el grado de f es primo si, y solo si, no hay extensiones intermedias entre \mathbb{Q} y $\mathbb{Q}(u)$.
16. Sea E/K una extensión de Galois, sea F/K una subextensión y sea $a \in F$. Demuestra que $F = K(a)$ si, y solo si, los elementos de $\text{Gal}(E/K)$ que fijan a son exactamente $\text{Gal}(E/F)$. Utilizando este resultado



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70