

Hoja 1

1.- Hallar todos los valores de  $a$  y  $b$  para los que los vectores  $x = (4, b, 1)$  e  $y = (a, b, 0)$  de  $\mathbb{R}^3$ , son ortogonales. ¿Cuál es el lugar geométrico del plano determinado por tales  $a$  y  $b$ ?

2.- Demostrar que para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}^n$  se cumple

(a)  $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$ , (ley del paralelogramo).

(b)  $\|x - y\| \cdot \|x + y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$ .

(c)  $x \cdot y = 0$  si y sólo si  $\|x + y\| = \|x - y\|$ .

(d)  $x \cdot y = 0$  si y sólo si  $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(e)  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ .

Interpretar dichos resultados geoméricamente en términos del paralelogramo formado por los vectores  $x$  e  $y$ .

3.- Dibujar las curvas de nivel y la gráfica de las siguientes funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

(a)  $f(x, y) = x - y + 2$

(b)  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

(c)  $f(x, y) = -xy$

(d)  $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$

(e)  $f(x, y) = 1 + (x^2 + y^2)$

(f)  $f(x, y) = x^3 - x$

(g)  $f(x, y) = \frac{x}{1 + y^2}$

(h)  $f(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$

(i)  $f(x, y) = \sin^2(x^2 + y^2)$

4.- Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

(a)  $f(x, y, z) = x - y - z + 2$ .

(b)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ .

(c)  $f(x, y, z) = y(x + z)$ .

(d)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ .

(e)  $f(x, y, z) = \cos((x^2 + y^2) - z)$ .

(f)  $f(x, y, z) = x - y$ .

(g)  $f(x, y, z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2)$ .

(h)  $f(x, y, z) = -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z$ .

5.- Dibujar las superficies determinadas por las ecuaciones siguientes:

(a)  $z = 1 - x^2 - y^2$ .

(b)  $z = x^2 - y^2$ .

(c)  $z = x^2 + y^2 + 1$ .

(d)  $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ .

(e)  $x^2 + z^2 = 4$ .

(f)  $z^2 = 1 + x^2 + y^2$ .

(g)  $z^2 = x^2 + y^2$ .

(h)  $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ .

6.- Hallar, si existe, el límite de la sucesión  $\{x_k\}_k$  en  $\mathbb{R}^2$  cuando

$x_k = \left(\frac{\log k}{k}, k^{1/k}\right)$ .

$x_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k}\right)$ .

$x_k = \left(\cos \frac{k\pi}{2}, \frac{1}{k} \sin\left(k^2 + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ .

$x_k = \left(\sqrt{k^2 + 2} - k, \frac{1}{k^k}\right)$ .

7.- Hallar, si existe, el límite de la sucesión  $\{x_k\}_k$  en  $\mathbb{R}^2$  cuando

$$x_k = \left(a_k, \frac{1}{a_k - 2}\right)$$

y la sucesión  $\{a_k\}_k$  de números reales está definida mediante

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad 7a_{k+1} = a_k^3 + 6, \quad \text{para cada } k \geq 1.$$

(Indicación: demostrar que  $\{a_k\}_k$  es creciente y que cada  $a_k < 1$ .)

8.- Sea

$$B = \left\{ \left( x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}.$$

Demostrar que  $B$  no es cerrado. (Indicación: utilizar la caracterización de cerrados por medio de sucesiones).

9.- Hallar los límites

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 \operatorname{sen} y^2 + y^4 e^{-|x|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{máx}\{|x|, |y|\}}{\sqrt{x^4 + y^4}}.$$

10.- En cada una de las funciones que siguen, se pide determinar los conjuntos de puntos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  donde están definidas y donde son continuas.

$$\begin{array}{lll} (i) f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2. & (j) f(x, y) = \tan \frac{x^2}{y}. & (k) f(x, y) = \frac{1}{\log(x^2 + y^2)}. \\ (l) f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}. & (m) f(x, y) = \frac{\cos x^2}{y}. & (n) f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{array}$$

11.- Sea

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

definida para los  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tales que  $x + y \neq 0$ . Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = -1.$$

¿Existe el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ?

12.- Sea  $f(x, y)$  definida mediante

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$$

en los  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tales que  $x^2y^2 + (x - y)^2 \neq 0$ . Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$$

y que no existe el  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

13.- Demostrar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x \operatorname{sen} \frac{1}{y} & \text{si } x, y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tiene límite cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$  y que, sin embargo, no existen los límites iterados

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right).$$

14.- Para cada  $(x, y) \neq (0, 0)$  se define

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Hallar el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  a lo largo de la rectas  $y = \lambda x$ . ¿Es posible definir  $f(0, 0)$  de modo que  $f$  sea continua en  $(0, 0)$ ?

15.- ¿Se pueden hacer continuas las funciones

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

definiéndolas de forma adecuada en  $(0, 0)$ ?

16.- Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ ó } y \geq x^2, \\ 1 & \text{si } 0 < y < x^2. \end{cases}$$

Demostrar que  $f(x, y) \rightarrow 0$  a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual (salvo en el origen)  $f(x, y)$  tiene el valor constante 1. ¿Es  $f$  continua en el origen?

17.- Estudiar si son abiertos o cerrados los siguientes conjuntos, utilizando razonamientos con funciones continuas.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 36\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 + \cos^2(x + y)\},$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^6 + 2y^2 + z^4 < 5\},$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1, \exp((x^2 + y^2) - 5) < 1\},$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y^2)^4 > 1\}.$$

¿Son acotados o compactos algunos de ellos?