

Matemática Discreta

Lista 5 $\frac{1}{2}$

2º Matemáticas, curso 2020-21

SOBRE GRAFOS PLANOS

1. Encontrar la fórmula de Euler para un grafo plano no conexo. Hacer lo mismo para las desigualdades $|A| \leq 3(|V| - 2)$ y $|A| \leq 2(|V| - 2)$ (esta última si G no tiene 3-ciclos).
2. Encontrar todos los poliedros regulares convexos (todas las caras tienen el mismo número de aristas y todos los vértices tienen el mismo grado).
3. Supongamos que todas las caras de un grafo conexo y plano tienen 5 aristas y el grafo tiene, al menos, 2 caras.
 - a) ¿Qué relación existe entre $|A|$ y $|V|$?
 - b) Si además se supone que el grafo es 3-regular ¿cuántas caras tiene?

SOBRE SERIES DE POTENCIAS

4. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n) x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^{1+2+\dots+n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n^n}$$

5. Supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en x_0 . Demostrar que su radio de convergencia es, al menos, $|x_0|$.
6.
 - a) Supongamos que $\lim b_n = b$. Demostrar que $\limsup b_n u_n = b \limsup a u_n$.
 - b) Usar el apartado anterior para ver que las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ tienen el mismo radio de convergencia. Más generalmente, todas las series $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n$ tienen el mismo radio de convergencia sea cual sea el $k \in \mathbb{Z}$

7. (Teorema del binomio para exponentes reales) Sea α un número real con $\alpha \notin \mathbb{N}$ y sea

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha, \quad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} \text{ si } j > 1$$

- a) Demostrar que el radio de convergencia de la serie $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ es 1.
- b) Comprobar que $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$.
- c) Concluir que $f(x) = (1+x)^\alpha$, es decir,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

si $|x| < 1$