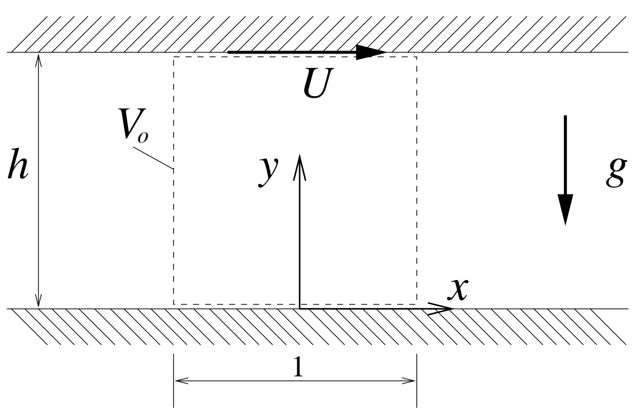
**ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS**
SOLUCIONES EXACTAS

**Problema 1**
Un fluido de propiedades constantes (densidad $\rho$, viscosidad $\mu$, conductividad térmica $k$ y calor específico $c$) se encuentra confinado entre dos paredes horizontales infinitas separadas una distancia $h$. La pared inferior se encuentra en reposo, mientras que la superior se mueve paralelamente a sí misma con velocidad $U$, induciendo en el fluido un movimiento estacionario denominado *flujo de Couette*, que se pide estudiar. En particular, sabiendo que la presión a lo largo de la pared superior es uniforme de valor $p_0$, y que la temperatura y la velocidad son función exclusiva de la distancia a la pared inferior, $y$, se pide:

1. Obtener los campos de velocidad, $\bar{v} = v_x(y)\bar{e}_x + v_y(y)\bar{e}_y$, y presión $p(x, y)$ en el fluido.
2. Calcular el flujo volumétrico $Q$ que circula por el canal por unidad de longitud $z$.
3. Determinar la evolución temporal de la línea fluida que en el instante $t_i$ tiene de ecuación paramétrica $x_i = 0$, $y_i = \lambda$ con $0 < \lambda < h$.
4. Si las temperaturas de las paredes inferior y superior son $T_i$ y $T_s$, respectivamente, obtener la distribución de temperaturas $T(y)$.
5. Calcular la fuerza por unidad de superficie que el fluido ejerce sobre cada pared.
6. Calcular el flujo de calor del fluido a cada una de las paredes.
7. Aplicando las ecuaciones de la energía cinética y de la energía interna al volumen de control $V_0$ de la figura, demostrar que la potencia necesaria para mover la pared superior se disipa por viscosidad en el interior del fluido, generando un calor que se transmite por conducción al exterior a través de las paredes.



**Problema 2**

Considere el movimiento de un líquido de propiedades constantes (densidad $\rho$, viscosidad $\mu$, conductividad térmica $k$ y calor específico $c$) en presencia de una placa plana porosa. Lejos de la placa, la presión reducida del líquido es $P_\infty$, su velocidad tiene una componente paralela a la placa $U_\infty$ y su temperatura es $T_\infty$, distinta de la temperatura de la pared $T_p$. A través de la placa se succiona el líquido con velocidad $v_p$ normal a la misma. Teniendo en cuenta que los campos de velocidad y temperatura son sólo función de la coordenada $y$ perpendicular a la placa, se pide determinar:

1. Los campos de velocidad, $\bar{v} = v_x(y)\bar{e}_x + v_y(y)\bar{e}_y$, y de presión reducida, $P(x, y)$.
2. El campo de temperaturas, $T(y)$.
3. Las líneas de corriente.
4. El esfuerzo de fricción sobre la pared.
5. El flujo de calor desde el fluido a la pared.

**Problema 3**

Considere el movimiento de un líquido de propiedades constantes (densidad $\rho$, viscosidad $\mu$, conductividad térmica $k$ y calor específico $c$) situado entre dos cilindros concéntricos de radios $R_1$ y $R_2 > R_1$, que giran con velocidades angulares $\Omega_1$ y $\Omega_2$, y que están a temperaturas $T_1$ y $T_2$. Sabiendo que debido a la simetría del problema $u_r = u_z = 0$, y $\partial/\partial z = 0$, se pide:

1. Los campos de velocidad y de presión reducida.
2. Par que el fluido ejerce sobre cada cilindro.
3. Campo de temperaturas en el líquido.

**Problema 4**

Un cilindro infinitamente largo de radio $a$ se encuentra inmerso en un líquido de propiedades constantes (densidad $\rho$, viscosidad $\mu$, conductividad térmica $k$ y calor específico $c$). A través de la pared porosa del cilindro se succiona radialmente un gasto volumétrico de líquido $2\pi a V_0$ por unidad de longitud. Suponiendo que el movimiento del líquido en el exterior del cilindro es puramente radial y estacionario, se pide:

1. Determinar el campo de velocidad.
2. Trayectoria de la partícula fluida que en el instante $t = t_i$ está situada a una distancia $r = r_i > a$ del eje del cilindro, y tiempo en el que dicha partícula es succionada por el cilindro.
3. Esfuerzo viscoso $\bar{\bar{\tau}}' \cdot \bar{n}$ en la pared del cilindro.
4. Si la temperatura del líquido lejos del cilindro es $T_\infty$, y la pared del cilindro se mantiene a temperatura constante $T_0$, determinar el campo radial de temperaturas que aparece en el fluido. Supongo que la disipación viscosa es despreciable, y proporcione un criterio para ello.
5. Obtener la cantidad de calor por unidad de longitud y tiempo que pasa por conducción del fluido al cilindro.

**Problema 5**

Un globo esférico de radio $R(t)$ variable con el tiempo se encuentra inmerso en un líquido de densidad $\rho$ y viscosidad $\mu$ constantes. Sabiendo que la presión lejos del globo, donde el líquido permanece en reposo, es $p_\infty$, que el movimiento es puramente radial con simetría esférica, y que las fuerzas másicas son despreciables, se pide determinar, en función de $R(t)$ y $\dot{R}(t) = dR/dt$:

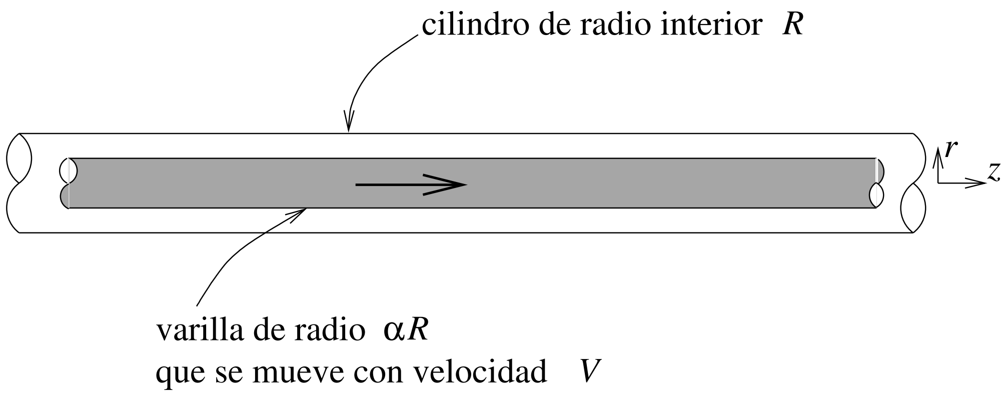
1. Distribución de velocidades.
2. Campo de presión.
3. Disipación de energía mecánica en el líquido debido a la viscosidad.
4. Trabajo comunicado por el globo al fluido.

**Problema 6**

Una esfera de radio $a$, cuya pared se mantiene a una temperatura constante $T_0$, se encuentra inmersa en un líquido de propiedades constantes (densidad $\rho$, viscosidad $\mu$, conductividad térmica $k$ y calor específico $c$). A través de la pared porosa de la esfera se succiona radialmente un gasto volumétrico de líquido $4\pi a^2 V_0$. Lejos de la esfera, donde la presión es $p_\infty$ y la temperatura es $T_\infty$, el líquido permanece en reposo. Para el movimiento radial y estacionario que se establece, se pide:

1. Distribución de velocidades.
2. Trayectoria de la partícula fluida situada que en el instante $t = t_i$ se encuentra en la posición $r = r_i > a$, determinando el instante del tiempo $t_s$ en el que la partícula atraviesa la pared de la esfera.
3. Campo de presión.
4. Determine el campo radial de temperatura en el líquido, suponiendo despreciable la disipación viscosa (dar un criterio para ello).
5. Cantidad de calor que pasa por conducción del líquido a la esfera por unidad de tiempo.

**Problema 7**
Considere el sistema representado en la siguiente figura, en el que una varilla cilíndrica de radio $R_o$ se mueve longitudinalmente con velocidad $V$ por el interior de un cilindro coaxial de radio $R$. El espacio entre la varilla y el cilindro está lleno de un líquido de propiedades constantes (densidad $\rho$, viscosidad $\mu$, conductividad térmica $k$ y calor específico $c$), cuyo movimiento se desea determinar. Definimos la relación de radios $\alpha$, de manera que $R_o = \alpha R$.




Utilizaremos el sistema de coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ mostrado en la figura. Consideramos varilla y cilindro de longitud infinita y por lo tanto, el problema axisimétrico es unidimensional, de manera que la velocidad depende solo de la coordenada radial $r$, $\bar{v} = \bar{v}(r)$. Adicionalmente, la presión en el interior de fluido es uniforme. Con estas suposiciones, se pide:

1. Demostrar que el movimiento es unidireccional, es decir, que la velocidad tiene sólo componente axial $v_z(r)$.

2. Determinar el perfil de velocidad $v_z(r)$.

3. Obtener el caudal $Q$ que circula por el conducto.

4. Determinar la fuerza $\bar{F}_v$ (magnitud, dirección y sentido) que el fluido ejerce sobre la varilla por unidad de longitud de ésta.

5. Si la varilla se mantiene a temperatura constante $T_v$ y el cilindro exterior a temperatura constante $T_c$, determinar la distribución de temperaturas en el fluido $T(r)$ y el flujo de calor $q_c$ que el fluido transfiere al cilindro por unidad de longitud. Particularizar la solución para el caso en que $T_v = T_c$, ¿es en este caso la temperatura uniforme en todo el fluido?

AYUDA:

$$\int x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, x^2 \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) \qquad\qquad \int \frac{1}{x} \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, (\ln x)^2$$

**Problema 8**
El cilindro sólido de eje $z$ y radio $a$ de la figura se mueve verticalmente con velocidad $U$, arrastrando en su movimiento una capa líquida de espesor uniforme $h$, y propiedades constantes (densidad $\rho$, viscosidad $\mu$, conductividad térmica $k$ y calor específico $c$). Se sabe que la única componente no nula de velocidad es $v_z$, y que el esfuerzo viscoso en la superficie de separación del líquido con el aire es nulo por ser la viscosidad del aire pequeña, de manera que $\partial v_z/\partial r = 0$ en $r = a + h$. Suponga también que la presión en el aire que rodea al líquido puede considerarse uniforme y de valor $p_a$. Se pide determinar:

1. Distribución de velocidades y presiones en el líquido.
2. Fuerza que el fluido ejerce sobre el cilindro por unidad de longitud $z$.
3. Caudal de líquido arrastrado por el cilindro, $Q$, así como el valor de $U$ para el cual $Q = 0$.
4. Suponiendo que la temperatura de la pared del cilindro es $T_p$, y que el flujo de calor hacia el aire puede considerarse nulo por ser su conductividad térmica pequeña, de modo que $\partial T/\partial r = 0$ en $r = a + h$, calcular la distribución de temperaturas en el líquido, $T(r)$.
5. Calcular el flujo de calor del fluido a la pared del cilindro.