

1. APLICACIONES LINEALES

1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales:

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y, y, x - 2y)$. Sí es lineal.
- b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. No es lineal. Basta observar que $f(2(1, 1)) = f(2, 2) = 4$, que es distinto de $2f(1, 1) = 2$.
- c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$. No es lineal. Basta observar que $f(0, 0) \neq (0, 0, 0)$.
- d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (z, y + x)$. Sí es lineal.
- e) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = |x - y|$. No es lineal. Basta observar que $f(-1(1, 0)) = 1$ es distinto de $-f(1, 0) = -1$.
- f) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$, $f(x, y, z) = (y + z)t^2 + (x + y)t + z$. Sí es lineal.
- g) $f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $f(A) = A^T$. Sí es lineal. Se tiene que $f((A + B)) = (A + B)^T = A^T + B^T = f(A) + f(B)$ y $f(\lambda A) = (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda f(A)$.

Los resultados no probados se dejan como tarea para el alumno.

2. Dadas f y g de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 - x_3)$ y $g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 - 1, x_3)$, ver si son lineales y, en ese caso, hallar el núcleo y la imagen.

La aplicación f es lineal. La comprobación se deja como ejercicio para el alumno. La aplicación g no es lineal ($g(0, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$).

$$\text{Ker}(f) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\bar{x}) = \bar{0}\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, x_2 = 0, x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

Dicho de otro modo, $\text{Ker}(f)$ es el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 de ecuaciones cartesianas

$$\text{Ker}(f) \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Al resolver, resulta $\text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$. Por otro lado, $\text{Im}(f) = L(f(B))$, siendo B cualquier base del espacio de partida \mathbb{R}^3 , por ejemplo la base canónica. Así:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

3. Determinar la dimensión y bases de $Ker(f)$ e $Im(f)$ para las siguientes aplicaciones lineales:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, 3x_3)$.

Se tiene

$$Ker(f) = \begin{cases} 2x_1 & = 0 \\ x_1 + x_2 & = 0 \\ 3x_3 & = 0 \end{cases}$$

Dicho de otro modo, $Ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$, con lo que $dim(Ker(f)) = 0$ y no hay base. Por otro lado, si B_c es la base canónica de \mathbb{R}^3 ,

$$Im(f) = L(f(B_c)) = L((2, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) = \mathbb{R}^3.$$

Para llegar a esta conclusión habría bastado aplicar la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales, que permite concluir que $dim(Im(f)) = 3$. Una base de $Im(f)$ es cualquier base de \mathbb{R}^3 , por ejemplo la canónica.

b) $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, x_2)$.

Calculemos $Ker(f)$:

$$Ker(f) \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 & = 0 \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

de modo que $Ker(f) = \{(0, 0)\}$ y $dim(Ker(f)) = 0$.

Por otro lado,

$$Im(f) = L(f(B_c)) = L((2, 1, 0), (1, -2, 1))$$

con lo que $dim(Im(f)) = 2$ y una base suya es $B_{Im(f)} = \{(2, 1, 0), (1, -2, 1)\}$

c) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 - x_3)$.

Se tiene

$$Ker(f) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

de modo que $Ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$ y $dim(Ker(f)) = 0$, por lo que no hay base. Si aplicamos la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales, $3 = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$, de manera que $dim(Im(f)) = 3$ y, por tanto, $Im(f) = \mathbb{R}^3$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Pasando a ecuaciones paramétricas queda

$$\text{Ker}(f) \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -\mu \\ x_4 = 2\mu \end{cases}$$

Por tanto, $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$ y una base es

$$B_{\text{Ker}(f)} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 2)\}.$$

La dimensión de la imagen de f es $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2$. Al estar $\text{Im}(f)$ contenida en \mathbb{R}^2 , resulta $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Una base puede ser $B_{\text{Im}(f)} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el homomorfismo definido por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea W el subespacio de \mathbb{R}^2 definido por $x_1 - x_2 = 0$. Hallar las ecuaciones de $f^{-1}(W)$.

El subespacio vectorial $f^{-1}(W)$ se define como

$$f^{-1}(W) = \{\bar{x} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : f(\bar{x}) \in W\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : A\bar{x} \in W\},$$

esto es,

$$f^{-1}(W) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x - y, x + z + 2t) \in W\} =$$

$$= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - (x + z + 2t) = 0\}$$

La ecuación cartesiana de $f^{-1}(W)$ es:

$$f^{-1}(W) \equiv \{y + z + 2t = 0\}$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Téngase en cuenta que $f(W) = L(f(B_W))$, siendo B_W una base del subespacio W . El primer paso será obtener B_W .

$$W \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Al pasar a paramétricas,

$$W \equiv \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}\mu \\ x_2 = -\frac{1}{2}\mu \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = \mu \end{cases}$$

de modo que una base de W es $B_W = \{(-1, -1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\}$.

Concluimos

$$\begin{aligned} f(W) &= L(f(-1, -1, 0, 2), f(0, 0, 1, 0)) = \\ &= L((4, 0, -4), (-1, 0, 1)) = L((-1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$f(W) \equiv \begin{cases} y_1 = -\lambda \\ y_2 = 0 \\ y_3 = \lambda \end{cases}$$

Obtengamos las ecuaciones cartesianas. Sea $(y_1, y_2, y_3) \in f(W)$. Entonces

$$1 = r \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

se escoge -1 como menor no nulo de orden máximo y se extiende a dos menores de orden 2 nulos que dan lugar a las ecuaciones:

$$f(W) \equiv \begin{cases} y_1 + y_3 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

La matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de las bases B y B' es:

$$A = M(f, B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Dado un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, con coordenadas $X_B = (x_1, x_2, x_3)$ respecto de la base B y, dada su imagen $f(\bar{x}) = \bar{y}$ con coordenadas $Y_{B'} = (y_1, y_2)$ respecto de B' , se tiene la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

A esta expresión se la llama ecuación matricial de f respecto de las bases B y B' .

Las ecuaciones de f son

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = -x_1 - 2x_3 \end{cases}$$

Por otro lado, dado que las columnas de la matriz A son las coordenadas de un sistema de generadores de $Im(f)$, entonces $dim(Im(f)) = r(A) = 2$. En consecuencia, $Im(f) = \mathbb{R}^2$. Por la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales, $dim(Ker(f)) = 3 - 2 = 1$. El homomorfismo f es un epimorfismo y no es un monomorfismo ni, por tanto, un isomorfismo.

7. Sea la aplicación $f : E \rightarrow F$, con E y F de dimensiones 3 y 4 respectivamente, definida de la siguiente forma: $f(e_2) = -e'_1 + e'_2 - e'_4$, $f(e_3) = e'_1 + e'_2 - e'_3 + e'_4$ y $e_1 \in Ker(f)$. Hallar dimensión y una base para $Ker(f)$ y para $Im(f)$.

Calculemos la matriz $A = M(f, B, B')$, siendo $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ bases de E y F respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$dim(Im(f)) = r(A) = 2 \quad dim(Ker(f)) = dim(E) - dim(Im(f)) = 1$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Falta ahora determinar una base de $\text{Ker}(f)$.

$$\text{Ker}(f) \equiv \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Pasando a paramétricas

$$\text{Ker}(f) \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Por consiguiente, una base es $B_{\text{Ker}(f)} = \{e_1\}$ (téngase en cuenta que $(1, 0, 0)$ son las coordenadas de e_1 respecto de B).

8. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida de la siguiente forma: $f(2, -1) = (1, 0, -1, 3)$ y $f(4, 1) = (2, -2, 3, 1)$. Calcular:
- La matriz asociada respecto de las bases canónicas.
 - Las ecuaciones de $\text{Im}(f)$.

Resolvamos a).

$$\begin{aligned} f(1, 0) &= f\left(\frac{1}{6}((2, -1) + (4, 1))\right) = \frac{1}{6}f((2, -1) + (4, 1)) \\ &= \frac{1}{6}(f(2, -1) + f(4, 1)) = \frac{1}{6}((1, 0, -1, 3) + (2, -2, 3, 1)) = \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(0, 1) &= f\left(\frac{1}{3}(-2(2, -1) + (4, 1))\right) = \frac{1}{3}f(-2(2, -1) + (4, 1)) \\ &= \frac{1}{3}(-2f(2, -1) + f(4, 1)) = \frac{1}{3}(-2(1, 0, -1, 3) + (2, -2, 3, 1)) = \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 5/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz también se puede hallar observando que

$$M(f, B_c, B'_c) = M(f, B, B'_c)M(B_c, B)$$

siendo B la base $B = \{(2, -1), (4, 1)\}$. Se tiene

$$M(f, B, B'_c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M(B_c, B) = M(B, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -2/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Sólo queda multiplicar las dos matrices:

$$M(f, B_c, B'_c) = M(f, B, B'_c)M(B_c, B) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 5/3 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado b). Se tiene $Im(f) = L((1, 0, -1, 3), (2, -2, 3, 1))$, de manera que una base suya es la formada por estos dos vectores. Las ecuaciones paramétricas son

$$Im(f) \equiv \begin{cases} y_1 = \lambda + 2\mu \\ y_2 = -2\mu \\ y_3 = -\lambda + 3\mu \\ y_4 = 3\lambda + \mu \end{cases}$$

Determinemos las ecuaciones cartesianas de $Im(f)$. Sea $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in Im(f)$. Entonces

$$2 = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

9. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida de la siguiente forma: $f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_3)e_2 + (x_2 - x_1)e_3$.
- Calcular la expresión analítica.
 - Encontrar los vectores invariantes.
 - Calcular las ecuaciones de $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$.
 - Hallar una base de $\text{Ker}(f)$ y ampliarla a \mathbb{R}^3 .
 - Hallar la expresión analítica respecto de esta última base.

Resolvamos a). La matriz $A = M(f, B, B)$ con $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La expresión analítica es

$$\begin{cases} y_1 = x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_3 \\ y_3 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

Resolvamos b). Los vectores invariantes, $\text{Invar}(f)$, son aquellos \bar{x} tales que $\bar{x} = f(\bar{x})$. Es fácil probar que $\text{Invar}(f)$ tiene estructura de subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 .

$$\text{Invar}(f) = \{\bar{x} : A\bar{x} = \bar{x}\}$$

$$\begin{aligned} \text{Invar}(f) &\equiv \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 = x_1 + x_3 \\ x_3 = -x_1 + x_2 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \sim \\ &\sim \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si se pasa a paramétricas y se obtiene una base, resulta $\text{Invar}(f) = L((1, 1, 0))$ (con coordenadas respecto de B), esto es, la recta engendrada por el vector $e_1 + e_2$ es una recta invariante (la imagen de cada vector es él mismo).

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Las ecuaciones paramétricas son

$$\text{Ker}(f) \equiv \begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = -\lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

Por otro lado,

$$\text{Im}(f) = L((0, 1, -1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)) = L((0, 1, -1), (1, 0, 1))$$

Es claro que $B_{\text{Im}(f)} = \{(0, 1, -1), (1, 0, 1)\}$, de modo que las ecuaciones paramétricas son

$$\text{Im}(f) \equiv \begin{cases} y_1 = \mu \\ y_2 = \lambda \\ y_3 = -\lambda + \mu \end{cases}$$

Para obtener las ecuaciones implícitas, consideramos un vector $\bar{y} \in \text{Im}(f)$ con coordenadas (y_1, y_2, y_3) respecto de la base B . Entonces

$$2 = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

por lo que la ecuación cartesiana es $\text{Im}(f) \equiv \{-y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$.

Resolvamos el apartado d). Una base de $\text{Ker}(f)$ es $B_{\text{Ker}(f)} = \{(-1, -1, 1)\}$, con coordenadas respecto de B , esto es, $B_{\text{Ker}(f)} = \{-e_1 - e_2 + e_3\}$. Para extenderlo a una base de \mathbb{R}^3 basta escoger otros dos vectores que, junto al primero, sean base; por ejemplo, $B_{\mathbb{R}^3} = \{(-1, -1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, con coordenadas respecto de B , de manera que $B_{\mathbb{R}^3} = \{-e_1 - e_2 + e_3, e_2, e_3\}$

Estudiemos el apartado e). Sabemos que

$$f(-e_1 - e_2 + e_3) = \bar{0} = 0(-e_1 - e_2 + e_3) + 0e_2 + 0e_3$$

$$f(e_2) = e_1 + e_3 = -1(-e_1 - e_2 + e_3) - 1e_2 + 2e_3$$

$$f(e_3) = e_1 + e_2 = -1(-e_1 - e_2 + e_3) + 0e_2 + 1e_3$$

De manera que la matriz asociada a f respecto a esta base es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

10. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(1, 0, 1) = (0, 1)$, $f(0, 0, -1) = (1, 1)$, $f(2, 1, 1) = (1, 0)$

- Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas.
- Hallar la matriz de f respecto de las bases

$$B_1 = \{(1, 0, 1), (0, 0, -1), (2, 1, 1)\} \text{ y } B_2 = \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

- Hallar ecuaciones y dimensión de $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$.

Resolvamos el apartado a). Se tiene

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= f((1, 0, 1) + (0, 0, -1)) = f(1, 0, 1) + f(0, 0, -1) = \\ &= (0, 1) + (1, 1) = (1, 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0, 1, 0) &= f((2, 1, 1) - 2(1, 0, 1) - (0, 0, -1)) = \\ &= f(2, 1, 1) - 2f(1, 0, 1) - f(0, 0, -1) = (0, -3). \end{aligned}$$

$$f(0, 0, 1) = f(-(0, 0, -1)) = (-1, -1).$$

De modo que, si B_c y B'_c son las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 respectivamente, la matriz $A = M(f, B_c, B'_c)$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado b). La matriz $M(f, B_1, B_2)$ es

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos el apartado c). Para determinar las ecuaciones de $\text{Ker}(f)$ y de $\text{Im}(f)$ basta considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $\text{Im}(f) = L((1, 2), (0, -3), (-1, 1)) = \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

11. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Se pide :

- Calcular "a" para que f sea inyectiva.
- Si f no es inyectiva, hallar $f(L_1)$, siendo L_1 el subespacio de ecuaciones $2x_1 - x_3 = 0$.
- Sea L_2 el subespacio de ecuaciones $x_1 + x_2 - x_4 = 0$, $3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0$ y f no inyectiva. Hallar una base de $L_2 \cap f(L_1)$ y de $L_2 + f(L_1)$.

Resolvamos a). Se tiene

$$f \text{ inyectiva} \iff \dim(\text{Ker}(f)) = 0 \iff \dim(\text{Im}(f)) = r(F) = 3$$

Por otro lado,

$$r(F) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & a \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

De manera que f es inyectiva si y sólo si $a \neq 2$.

Resolvamos b). Tenemos $a = 2$. Al pasar L_1 a paramétricas y obtener una base, resulta $B_{L_1} = \{(1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$. Por consiguiente,

$$f(L_1) = L(f(1, 0, 2), f(0, 1, 0)) = L((3, 2, 10, 5), (0, 1, 2, 1))$$

El cálculo de las ecuaciones cartesianas es una tarea rutinaria, dando como resultado

$$f(L_1) \equiv \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

Resolvamos el apartado c). Tenemos $a = 2$. Las ecuaciones de L_2 son

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Las ecuaciones cartesianas de L_2 unidas a las de $f(L_1)$ dan lugar a

$$L_2 \cap f(L_1) \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 & = 0 \\ -x_3 + 2x_4 & = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 & = 0 \\ -x_3 + 2x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

Pasando a paramétricas,

$$L_2 \cap f(L_1) \equiv \begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Una base es $B_{L_2 \cap f(L_1)} = \{(-1, 1, 0, 0)\}$.

Obtengamos ahora una base para

$$L_2 + f(L_1) = L((3, 2, 10, 5), (0, 1, 2, 1), (-1, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 1))$$

Escalonando la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

se tiene una base de $L_2 + f(L_1)$, $B_{L_2 + f(L_1)} = \{(1, 0, 2, 1), (0, 1, 2, 1)\}$.

12. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, definida por $f(p(x)) = p'(x)$. Hallar la matriz asociada (con respecto a la base $B = \{1, x, x^2\}$), ecuaciones, $Ker(f)$, $Im(f)$. Determinar si es un monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo.

Como

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ f(x) &= 1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ f(x^2) &= 2x &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2, \end{aligned}$$

la matriz $F = M(f, B, B)$ es

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Como $r(F) = 2$, se tiene que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, de modo que f no es epimorfismo. Por otro lado, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[x]) - \dim(\text{Im}(f)) = 3 - 2 = 1$, con lo que f tampoco es un monomorfismo.

$$\text{Ker}(f) \equiv \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Resulta $\text{Ker}(f) = L((1, 0, 0))$ con coordenadas respecto de B , esto es, $\text{Ker}(f) = L(1) = \{\text{polinomios constantes}\}$.

Obsérvese que $\text{Im}(f) = L((1, 0, 0), (0, 2, 0))$ con coordenadas respecto de B , esto es, $\text{Im}(f) = L(\{1, 2x\})$. Las ecuaciones paramétricas son

$$\text{Im}(f) \equiv \begin{cases} y_1 = \lambda \\ y_2 = 2\mu \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

y las implícitas

$$\text{Im}(f) \equiv \{y_3 = 0\}$$

13. Sean

$$B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \text{ y } B'_1 = \{(1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$$

bases de \mathbb{R}^3 . Sean B_c la base canónica y

$$B_2 = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$$

bases de \mathbb{R}^4 .

- ¿Qué vector de \mathbb{R}^3 tiene, respecto a la base B_1 , coordenadas $(1, 2, -1)$ y cuáles son éstas respecto a B'_1 ?
- Calcular las matrices de cambio de base de B_1 en B'_1 y de B_c en B_2 .
- Siendo f el homomorfismo caracterizado por $f(1, 1, 0) = (1, 1, 0, 0)$, $f(1, 0, 1) = (1, 0, 1, 0)$ y $f(0, 1, 1) = (0, 0, 1, 1)$, hallar la matriz de f respecto de B_1 y B_c , respecto de B_1 y B_2 , respecto de B'_1 y B_c y respecto de B'_1 y B_2 .

Resolvamos el apartado a). Buscamos un vector \bar{x} tal que sus coordenadas respecto de la base B_1 sean $X_{B_1} = (1, 2, -1)$. Esto quiere decir

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Buscamos ahora las coordenadas de \bar{x} respecto de B'_1 , $X_{B'_1}$. Téngase en cuenta que $X_{B'_1} = M(B'_c, B'_1)X_{B'_c}$. La matriz $M(B'_c, B'_1)$ es

$$M(B'_1, B'_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$X_{B'_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado b). Determinemos $P = M(B_1, B'_1)$. Téngase en cuenta que $M(B_1, B'_1) = M(B'_c, B'_1)M(B_1, B'_c)$. Como

$$M(B_1, B'_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M(B'_c, B'_1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$P = M(B_1, B'_1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Falta calcular la matriz $Q = M(B_c, B_2)$. Se tendrá

$$Q = M(B_c, B_2) = M(B_2, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el apartado c). La matriz $F = M(f, B_1, B_c)$ es

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Determinemos ahora $G = M(f, B_1, B_2)$. Resulta

$$G = M(B_c, B_2)M(f, B_1, B_c) = QF = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Hallemos $H = M(f, B'_1, B_c)$. Como $M(f, B'_1, B_c) = M(f, B_1, B_c)M(B'_1, B_1) = FP^{-1}$ resulta

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Tan sólo queda calcular $I = M(f, B'_1, B_2) = M(B_c, B_2)M(f, B'_1, B_c) = QH$. Se tendrá

$$I = \begin{pmatrix} 5/6 & 5/6 & -7/6 \\ -2/3 & 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 4/3 \\ 5/6 & -7/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

14. Sea la aplicación $f : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, a + b + c, 0)$$

- Probar que f es lineal y hallar su matriz respecto de las bases canónicas.
- Obtener las bases, dimensión y ecuaciones implícitas de $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$.

Resolvamos el apartado a). La demostración de la linealidad de f es rutinaria y se deja como ejercicio para el alumno. La matriz asociada a f respecto de las bases canónicas es

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiemos b). Comenzamos con el cálculo de las dimensiones.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Una base para $Im(f)$ se obtiene a partir de las columnas de F :

$$B_{Im(f)} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$$

La ecuación implícita es

$$Im(f) \equiv \{y_3 = 0\}$$

Las ecuaciones implícitas del núcleo son

$$Ker(f) \equiv \begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

Una base es $B_{Ker(f)} = \{(0, -1, 0), (0, 0, 1)\}$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70