

1. EJERCICIOS

1. Analizar cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^3 son subespacios vectoriales.

a) $A = \{(2x, x, -7x)/x \in \mathbb{R}\}$

b) $A = \{(x, y, z)/xy = 1\}$

c) $A = \{(x, y, z)/x = y \text{ ó } x = z\}$

d) $A = \{(x, y, z)/x + y + z = 0 \text{ y } x - y - z = 0\}$

2. Analizar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_n[t]$ (conjunto de los polinomios con grado menor o igual a $n \geq 1$, con coeficientes en el cuerpo \mathbb{R}).

a) El conjunto A de todos los polinomios con coeficientes en \mathbb{R} de grado n y el polinomio cero.

b) $A = \{p(t) \in \mathbb{R}_n[t]/3p(0) + p(1) = 1\}$.

c) $A = \{p(t) \in \mathbb{R}_n[t]/p'(0) + p''(0) = 0\}$

3. Analizar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

a) $A = \{M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})/det(M) = 0\}$.

b) $A = \{M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})/det(M) \neq 0\}$

c) $A = \{M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})/tr(M) = 0\}$.

4. Sea $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las funciones reales de variable real. Estudiar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})/f \text{ es continua en el intervalo } (a, b)\}$.

b) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})/f(1) = f(2)\}$.

c) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})/f \text{ es creciente en el intervalo } (a, b)\}$.

5. Se considera el sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas sobre el cuerpo \mathbb{R} :

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \quad \Bigg\}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Cartagena99

6. El rango de una matriz A coincide siempre con el número máximo de vectores fila linealmente independientes y con el número máximo de vectores columna linealmente independientes. Estudiar, utilizando este hecho, si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes:
- $\{(2, -1, 4), (4, -2, 8)\}$.
 - $\{(2, -1, 4), (4, 1, 8), (1, 0, 3)\}$.
 - $\{(2, -1, 4, 0), (0, -3, 1, 5), (4, 1, 7, -5)\}$.
 - $\{(1, -1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (0, 3, -1, 1), (6, 1, 2, 0)\}$.
7. En \mathbb{R}^3 se consideran los vectores $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, 3, 2)$, $x = (1, 1, 0)$, $y = (3, 8, 5)$. Demostrar que $L(\{x, y\}) = L(\{u, v\})$.
8. Determinar si las siguientes familias de vectores son sistemas de generadores de \mathbb{R}^3 . En los casos afirmativos, obtener una base.
- $\{(1, 1, 0), (2, 3, 8)\}$
 - $\{(1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 0)\}$
 - $\{(2, -1, 3), (4, 1, 2), (8, -1, 8)\}$.
 - $\{(1, 3, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 3), (6, 2, 1)\}$.
9. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[t]$ de los polinomios con grado menor o igual que n sobre el cuerpo \mathbb{R} , se considera el conjunto de vectores

$$B = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$$

Probar que B es una base de $\mathbb{R}_n[t]$.

10. En el espacio vectorial $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de las matrices de orden 2×2 sobre el cuerpo \mathbb{R} , se considera el conjunto de vectores

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Probar que B es una base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

12. Sea

$$W = L(\{(1, 2, -1, 3, 4), (2, 4, -2, 6, 8), (1, 3, 2, 2, 6), (1, 4, 5, 1, 8), (2, 7, 3, 3, 9)\})$$

Hallar un subconjunto de los vectores que sea base de W .

13. Se consideran en \mathbb{R}^4 los subespacios vectoriales

$$W_1 = L(\{(1, -1, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, -2, 1, 2)\})$$

$$W_2 = L(\{(0, -1, 1, 1), (1, -2, 1, 2)\})$$

Hallar $\dim(W_1 \cap W_2)$ y $\dim(W_1 + W_2)$, así como las ecuaciones implícitas y paramétricas de W_1 , W_2 y $W_1 + W_2$.

14. Determinar, en cada caso, si los vectores que se dan son una base de \mathbb{R}^4 .

- a) $\{(2, 1, 0, -1), (1, 2, 1, 0)\}$.
- b) $\{(0, 1, 2, -1), (1, 0, 1, -1), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 1, 2)\}$.
- c) $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 1), (2, 1, 1, 0), (1, -1, 2, -1)\}$.

Si ahora llamamos V_1, V_2, V_3 a los subespacios vectoriales generados, respectivamente, por los vectores de a), b), c), determinar: $\dim(V_i)$, $i = 1, 2, 3$; $\dim(V_i \cap V_j)$, $i \neq j$ y ecuaciones de la intersección; $\dim(V_i + V_j)$, $i \neq j$ y ecuaciones de $V_i + V_j$ ¿En qué casos $\mathbb{R}^4 = V_i \oplus V_j$?

15. Sean U, V, W , los siguientes subespacios de \mathbb{R}^3 :

$$U = \{(a, b, c)/a+b+c = 0\}, \quad V = \{(a, b, c)/a = c\}, \quad W = \{(0, 0, c)/c \in \mathbb{R}\}$$

Mostrar que:

- a) $\mathbb{R}^3 = U + V$.
- b) $\mathbb{R}^3 = U + W$.
- c) $\mathbb{R}^3 = V + W$.

¿En qué casos es directa la suma?



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

- a) $\dim(U + V)$ y ecuaciones de $U + V$.
 b) $\dim(U \cap V)$ y ecuaciones de $U \cap V$.

17. Sean los subespacios vectoriales de \mathbb{R}^4 siguientes:

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z = 0, y + t = 0\}$$

$$W_2 = L(\{(0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, -1)\})$$

Calcular :

- a) $\dim(W_1)$ y $\dim(W_2)$.
 b) $\dim(W_1 \cap W_2)$ y ecuaciones de $W_1 \cap W_2$. ¿Es $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$?
 c) $\dim(W_1 + W_2)$.

18. En \mathbb{R}^4 se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y = 0, z + t = 0\}$$

$$W_2 = L(\{(1, 1, -2, 2), (1, 0, -1, 0)\}).$$

Calcular ecuaciones paramétricas, implícitas y bases de $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$. ¿Es $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$?

19. Sean

$$W_1 = L(\{(-1, 0, 0, 1), (0, -1, -1, 1), (0, 1, -1, 0)\}),$$

$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + t = 0\}.$$

- a) Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de W_2 .
 b) Dar bases de $W_1 \cap W_2$ y de $W_1 + W_2$.

20. En el espacio vectorial real $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / a + b + c + d = 0 \right\}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

21. Dada la base de \mathbb{R}^3 , $B = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 2), v_3 = (1, 2, 3)\}$, hallar las coordenadas del vector $x = (6, 9, 14)$ en dicha base, determinando previamente la matriz de cambio de base $P = M(B_c, B)$ de la base canónica B_c en la base B .

22. En \mathbb{R}^3 se consideran las bases

$$B_1 = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 0)\} \text{ y } B_2 = \{(2, 1, 1), (1, 1, 1), (1, -1, 1)\}$$

- Calcular la matriz de cambio de base de B_2 a B_1 .
- Calcular las coordenadas en la base B_1 del vector cuyas coordenadas en B_2 son $(3, -2, 2)$.

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of a light blue and orange gradient, with a white shadow effect behind the letters.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70