

# Cálculo Numérico I

CURSO 2014-2015

Lista 6

1º DE MAT./D.G.

1. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrar una descomposición  $A = QR$  por Gram-Schmidt.

2. Sea  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y sea  $T_P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la transformación asociada ( $T_P(x) = Px$ ):

a) Demostrar que

$$T_P \text{ es una proyección ortogonal} \Leftrightarrow P^T = P \text{ y } P^2 = P.$$

b) Demostrar que si  $P$  da lugar a la proyección ortogonal sobre un subespacio  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  entonces  $I - P$  representa la proyección ortogonal sobre  $V^\perp$ .

c) Sea  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz ortogonal. Demostrar que  $U^2 = I$  si y sólo si  $U$  tiene la forma  $I - 2P$ , donde  $P$  es una proyección ortogonal.

3. a) Sea

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar una factorización  $B = QR$  y explicar qué dos posibilidades hay para las dimensiones de los factores  $Q$  y  $R$  y cómo se relacionan esas dos opciones.

b) Sea ahora  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , con  $m > n$  y con rango  $n$ . Si quisiésemos resolver el problema

$$\text{encontrar el } x \text{ tal que } \|b - Bx\|_2 \text{ es mínimo} \quad (*)$$

se podría usar la descomposición  $QR$  de  $B$  para reducirlo a la resolución de un sistema lineal triangular ¿qué sistema? Justificar la respuesta.

c) Indicar el número de operaciones (en orden de magnitud) que se realizan para resolver el problema (\*) del apartado anterior.

**Nota:** al contar separar la parte de la descomposición  $QR$  de la correspondiente a la resolución del sistema triangular.

4. Se consideran las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

donde  $b$  es el vector columna  $(1, 2, 3, 4)^T$ .

Cartagena99

- c) Denotando por  $x_1, x_2$  las respectivas soluciones, calcular los residuos  $r_j = A_j x_j - b$ ,  $j = 1, 2$ . ¿A qué se debe la diferencia entre los dos resultados?
5. Sea  $b \in \mathbb{R}^m$  y sean  $A, T$  matrices de tamaños  $m \times n$  y  $n \times p$ , respectivamente, tales que  $\ker A = 0$ ,  $\ker T = 0$ . Ponemos  $A_1 = AT$ . Sean  $x, x_1$  las soluciones de los sistemas lineales  $Ax = b$  y  $A_1 x_1 = b$  en el sentido de mínimos cuadrados.
- a) Demostrar la siguiente desigualdad para los residuos:  $\|Ax - b\| \leq \|A_1 x_1 - b\|$ .
- b) Demostrar que, en el caso  $n = p$ , se tiene la igualdad de los residuos.
6. (**matlab**) La función real  $f$  viene dada por su tabla de valores en los puntos  $0, 1, \dots, n$ , obtenidos de un experimento. Se pide encontrar su mejor aproximación, en el sentido de mínimos cuadrados, por un polinomio  $P_m$  de grado  $m$ .
- a) Escribir un programa que calcula estas aproximaciones y dibuja simultáneamente las gráficas de  $f$  y de  $P_3, P_5$  y  $P_{10}$ .
- b) Aplicar este programa para el caso  $n = 100$  y las funciones
- $f_1(x) = e^{x/10}$
  - $f_2(x) = 1/((x - 50)^2 + 4)$ .
7. Se considera la matriz  $A = \begin{bmatrix} 19 & 1 & 0 \\ 1 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$ .
- a) Aproximar, por el método de las potencias, su autovalor más grande.  
**Nota:** se puede hacer una buena elección del  $v_0$  inicial.
- b) Aproximar el autovalor más pequeño de  $A$  utilizando potencias inversas.
- c) Aproximar el autovalor intermedio utilizando potencias inversas con desplazamiento.
8. Sea  $D \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  una matriz simétrica cuyos autovalores son  $-7, -3, 1, 5$ .
- a) Si se usa el método de la potencia, ¿a qué autovalor podemos esperar convergencia? ¿por qué?
- b) Supongamos que no conocemos el autovalor  $-3$  pero sí el resto (es decir,  $-7, 1$  y  $5$ ) y sabemos que el que falta está entre  $-3.5$  y  $-2$ . Proponer un algoritmo (decir cuál y describirlo) para calcular el autovalor  $-3$  y decir qué velocidad de convergencia se puede esperar de dicho algoritmo y por qué.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70