

- (Subgrupos) Demuestra que  $SL(2, \mathbb{Z}_7) \triangleleft GL(2, \mathbb{Z}_7)$  y que  $GL(2, \mathbb{Z}_7)/SL(2, \mathbb{Z}_7) \cong \mathbb{Z}_7^\times$ . Usa los subgrupos de  $\mathbb{Z}_7^\times$  para calcular los subgrupos de  $GL(2, \mathbb{Z}_5)$  que contienen a  $SL(2, \mathbb{Z}_5)$ .
- (Subgrupos) Demuestra que  $N = \langle g_{2\pi/8}^2 \rangle$  es un subgrupo normal de  $D_8$  y que  $D_8/N \cong D_2$ . Usa los subgrupos de  $D_2$  para calcular los subgrupos de  $D_8$  que contienen a  $N$ .
- (Subgrupos) Calcula el normalizador del subgrupo  $\langle (1234) \rangle$ . Calcula todos los subgrupos conjugados de  $\langle (1234) \rangle$ . Comprueba que el número de subgrupos conjugados es igual a 24 entre el tamaño del normalizador.
- (Subgrupos) ¿Cuál es el centro de  $S_4$ ? Calcula todos los subgrupos centralizadores de  $S_4$ . Calcula todos los subgrupos de orden 8 de  $S_4$  sacándolos de la lista de centralizadores.
- (Subgrupos) Tenemos  $|S_6| = 16 * 9 * 5$ . Calcula subgrupos de órdenes 5, 9 y 16 de  $S_6$ .
- (Subgrupos) Demuestra que  $S_5$  no tiene subgrupos de orden 30. *Sugerencia: Si tuviera un subgrupo  $H$  de orden 30, la acción en el cociente daría un homomorfismo de  $S_5$  en  $S_4$  de núcleo  $N \leq H$ .*
- (Subgrupos) Demuestra que cualquier grupo  $G$  de orden 42 tiene algún subgrupo normal  $N$  de orden 7. Usa que  $|G/N| = 6$  para demostrar que  $G$  tiene algún subgrupo de orden 21.
- (Subgrupos) Sea  $T$  el subgrupo de  $SL(3, \mathbb{Z}_5)$  de matrices triangulares superiores con unos en la diagonal. Muestra que  $T$  tiene orden 125. Encuentra un subgrupo  $Z \leq T$  de orden 5 calculando el centro de  $T$ .
- (Abelianos) Demuestra que  $C_9 \times C_3$  no es cíclico y halla el número de elementos de orden 9.
- (Abelianos) ¿Para qué valores de  $n \geq 2$  es  $D_n$  isomorfo a  $C_n \times C_2$ ?
- (Abelianos) En  $C_{12} \times C_4 \times C_{15}$  encuentra un subgrupo de orden 9 y demuestra que no es cíclico.
- (Abelianos) Demuestra que  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ . Demuestra que  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$  no puede ser isomorfo a  $\mathbb{C}^*$  con el producto. *Sugerencia: Busca elementos con orden finito en  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$  y en  $\mathbb{C}^*$ .*
- (Abelianos) Expresa  $\mathbb{Z}_{35}^\times$  como producto de grupos cíclicos. Demuestra que su 2-subgrupo de Sylow no es cíclico.
- (Abelianos) Halla cuántos grupos no isomorfos hay en la siguiente lista:  $C_{100}, C_{25} \times C_4, C_4 \times C_6, C_2 \times C_{12}, C_{24}, C_4 \times C_{20}, C_4 \times C_5 \times C_5$ .
- (Abelianos) Demuestra que todo grupo abeliano de orden 45 contiene un elemento de orden 15. ¿Contiene necesariamente un elemento de orden 9?
- (Abelianos) Sabemos que un grupo abeliano  $G$  de orden 120 tiene exactamente 3 elementos de orden 2. Expresa  $G$  como (isomorfo a) un producto de grupos cíclicos.
- (Abelianos) Considera el grupo  $G = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{11}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{19}, \overline{26}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{34}, \overline{41}, \overline{44}\}$  con la multiplicación módulo 45. Escribe  $G$  como (isomorfo a) un producto de grupos cíclicos.
- (Clasificación) Sea  $p$  primo. Demuestra que todo automorfismo de  $\mathbb{Z}_p$  y de  $\mathbb{Z}_p^2$  es una aplicación lineal, y por tanto  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_p) = GL(1, \mathbb{Z}_p)$  y  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_p^2) = GL(2, \mathbb{Z}_p)$ .
- (Clasificación) Clasifica todos los grupos de orden 35 y 55.
- (Clasificación) ¿Es cíclico todo grupo de orden 26? ¿Y todo grupo de orden 171?

- 21.** (Clasificación) Demuestra que los únicos grupos de orden 18 con un subgrupo cíclico de orden 9 son  $C_{18}$  y  $D_9$ .
- 22.** (Clasificación) Demuestra que todo grupo de orden 42, de orden 45 y de orden 110 es resoluble.
- 23.** (Clasificación) Demuestra que todo grupo de orden 255 es cíclico. Haz lo mismo para grupos de órdenes 99 y 175.
- 24.** (Clasificación) Demuestra que todo grupo de orden 20 tiene un subgrupo de orden 10. Encuentra un grupo de orden 20 que no tenga elementos de orden 10.
- 25.** (Clasificación) Vamos a estudiar los grupos de orden 28.
- Demuestra que los cuatro grupos  $C_{28}, C_{14} \times C_2, D_{14}, \text{Aff}_{4,7}(\mathbb{Z}_{35})$  son no isomorfos,
  - Demuestra que todo grupo de orden 28 es isomorfo a uno de esos cuatro. ¿A cuál de ellos es isomorfo el grupo  $D_7 \times C_2$ ?
  - Demuestra que todo grupo de orden 28 tiene un elemento de orden 14.