

Álgebra Lineal
HOJA 1, 2019/20

Con la letra F denotamos tanto el conjunto de los números reales \mathbb{R} como el conjunto de los números complejos \mathbb{C} . La letra V siempre denota un espacio vectorial sobre F .

1. Dar una base del espacio vectorial

$$\{A \in M_{3 \times 3} : A^T = A\}$$

de matrices 3×3 simétricas.

2. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
- Cualquier conjunto que contiene a $\underline{0}$ es linealmente dependiente.
 - Cualquier base contiene a $\underline{0}$.
 - Los subconjuntos de conjuntos linealmente dependientes son linealmente dependientes.
 - Los subconjuntos de conjuntos linealmente independientes son linealmente independientes.
3. Sea $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_r$ un sistema de vectores linealmente independientes pero que no es sistema generador de V . Sea \underline{v}_{r+1} cualquier vector que no puede ser representado como combinación lineal de $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_r$. Demostrar que el sistema de vectores $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_r, \underline{v}_{r+1}$ es linealmente independiente.
4. Decidir razonadamente cuáles de los siguientes sistemas de vectores en F^3 son generadores, cuáles son linealmente independientes, y cuáles son bases. Para los que sean linealmente dependientes, escribir uno de los vectores como combinación lineal de los otros.
- $\{(1, 1, 1)^T\}$.
 - $\{(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$.
 - $\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T, (1, 1, 1)^T\}$.
 - $\{(1, 2, 1)^T, (2, 0, -1)^T, (4, 4, 1)^T\}$.
 - $\{(1, 2, 1)^T, (2, 0, -1)^T, (4, 4, 0)^T\}$.
 - $\{(1, 2, 3)^T, (2, 1, 0)^T, (1, 5, 9)^T\}$.
 - $\{(1, 2, 3)^T, (0, 4, 5)^T, (0, 0, 6)^T, (1, 1, 1)^T\}$.
 - $\{(3, 2, 1)^T, (1, 0, 0)^T, (2, 1, 0)^T\}$.
5. Decidir razonadamente si el siguiente sistema de vectores en $M_{2 \times 2}$ es generador, si es linealmente independiente, y si es base:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Cartagena99

$$\text{b) } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}.$$

$$\text{d) } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{e) } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sin(y) \end{pmatrix}.$$

$$\text{f) } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

8. Encontrar la matriz correspondiente a la función lineal $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por la reflexión en la línea $2x = y$. ¿Y respecto de $2x = y + 1$?

9. Encontrar la matriz correspondiente a cada una de las siguientes funciones lineales:

a) $T : F^2 \rightarrow F^3$ definida por $T(x, y)^T = (x + 2y, 2x - 5y, 7y)^T$.

b) $T : F^4 \rightarrow F^3$ definida por $T(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_2 - x_4, x_1 + 3x_2 + 6x_4)^T$.

c) $T : P_n \rightarrow P_n$ definida por $T(f(t)) = f'(t)$ (encontrar la matriz con respecto a la base canónica $1, t, t^2, \dots, t^n$).

d) $T : P_n \rightarrow P_n$ definida por $T(f(t)) = 2f(t) + 3f'(t) - 4f''(t)$ (encontrar la matriz con respecto a la base canónica $1, t, t^2, \dots, t^n$).

10. El conjunto de los números complejos \mathbb{C} se puede identificar canónicamente con el espacio vectorial real \mathbb{R}^2 , identificando cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con el vector $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$.

a) Considerando \mathbb{C} como un espacio vectorial complejo, demostrar que la multiplicación por un elemento $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ es una función lineal compleja $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y encontrar su matriz.

b) Considerando \mathbb{C} como un espacio vectorial real identificado con \mathbb{R}^2 , demostrar que la multiplicación por un elemento $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ define una función lineal real $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y encontrar su matriz.

c) Definimos $T(x + iy) = 2x - y + i(x - 3y)$. Demostrar que la función $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ no es lineal compleja, pero sí es lineal real. Encontrar la matriz de la función lineal real T .

11. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

13. Encontrar todos los inversos por la izquierda de $(1, 2, 3)^T$. Decidir razonadamente si $(1, 2, 3)^T$ es invertible por la derecha.

14. Sean T_1 y T_2 las funciones lineales en F^5 dadas por

$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + ax_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

(para cualquier elemento $a \in F$).

Demstrar que T_1 y T_2 son invertibles, y escribir las matrices de sus inversas.

15. Decidir razonadamente cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^3 son subespacios:

- $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$.
- $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0\}$.
- $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 x_2 = 0\}$.
- $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
- $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

16. Decidir razonadamente cuáles de los siguientes subconjuntos de $M_{3 \times 3}$ son subespacios:

- El subconjunto de matrices simétricas.
- El subconjunto de matrices invertibles.
- El subconjunto de matrices no invertibles.
- $\{A \in M_{3 \times 3} : A^2 = A\}$.
- $\{A \in M_{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}$.

17. Decidir razonadamente para qué valores de b tiene solución el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ b \end{pmatrix},$$

y encontrar la solución general del sistema para cada uno de esos valores.

18. Decidir razonadamente si el sistema de vectores

$$(1, 1, 0, 0)^T, (1, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 1, 1)^T, (0, 1, 0, 1)^T$$

es o no linealmente independiente en F^4 , y si es o no generador.

19. Decidir razonadamente cuáles de los siguientes sistemas de vectores son bases en F^3 :

- $(1, 2, -1)^T, (1, 0, 2)^T, (2, 1, 1)^T$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

21. Encontrar una matriz X que satisfaga $X = AX + B$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

22. Decidir para qué valores de a, b, c, d es invertible la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix},$$

y describir la matriz inversa para esos valores.

23. Escribir la matriz A correspondiente a una rotación en \mathbb{R}^3 de ángulo α alrededor de la recta $y = x$ del plano xy . Hacer lo mismo para una rotación alrededor de la recta generada por el vector $(1, 1, 1)$.

24. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
- Un espacio vectorial puede tener dos bases distintas.
 - Cualquier subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita tiene necesariamente dimensión finita también.
 - Un espacio vectorial de dimensión igual a $n \in \mathbb{N}$ tiene un único subespacio de dimensión igual a 0, y un único subespacio de dimensión igual a n .

25. Determinar la dimensión de \mathbb{P}_n , la dimensión de $M_{m \times n}$, y la dimensión del espacio de matrices $n \times n$ simétricas.

26. Si $\dim V = n$, demostrar que un sistema de n vectores $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ es linealmente independiente si y sólo si es generador.

27. Sea $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ una base de V . Demostrar que $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \underline{v}_3$ es una base de V .

28. Dados los elementos

$$\underline{v}_1 = (2, -1, 1, 5, -3)^T, \underline{v}_2 = (3, -2, 0, 0, 0)^T, \underline{v}_3 = (1, 1, 50, -921, 0)^T$$

de F^5 , demostrar que son un sistema linealmente independiente, y encontrar una base de F^5 que contenga a $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ y \underline{v}_3 .

29. Determinar la dimensión del subespacio $\text{span}(S)$ de F^4 generado por el conjunto de

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

- c) Cualquier sistema homogéneo de ecuaciones lineales tiene al menos una solución.
 - d) Cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene al menos una solución.
 - e) Cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene como mucho una solución.
 - f) Si el sistema homogéneo asociado a un sistema dado de ecuaciones lineales tiene al menos una solución, entonces el sistema dado de ecuaciones lineales tiene al menos una solución.
 - g) Si la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas es invertible, entonces el sistema no tiene ninguna solución distinta de 0 .
 - h) El conjunto de soluciones de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un subespacio de F^n .
 - i) El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un subespacio de F^n .
31. Demostrar que cada dos bases en un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.
32. ¿Tienen los tres planos $x + 2y + z = 4$, $y - z = 1$ y $x + 3y = 0$ algún punto en común?

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a background of a light blue and orange gradient with a subtle, abstract shape behind it.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70