Número							

Apellidos																											
Nombre																											

PROBLEMA 2 (60 minutos)
CONTESTAR EN ESTA HOJA. NO SE TENDRÁN EN CONSIDERACIÓN HOJAS ADICIONALES.

Enunciado: La figura inferior representa un modelo simplificado de avión con el grado de libertad de cabeceo α respecto al centro de gravedad CoG. En un momento determinado del vuelo, que transcurre a una velocidad U_∞ y altura constante (densidad ρ_∞ constante), el timón de altura comienza a oscilar de forma armónica, generando una variación del cabeceo de la aeronave que debe conocerse para estimar posibles factores de carga adversos en cabina de pilotos. En este problema se estimará esta oscilación en cabeceo asumiendo que las cargas aerodinámicas no estacionarias relevantes provienen únicamente de la cola horizontal.
El momento de inercia de la aeronave respecto al centro de gravedad es I_α, la cuerda de la cola horizontal c es constante a lo largo de su envergadura b.
Asumir movimiento cuasi-estacionario, despreciando los términos no circulatorios de las fuerzas aerodinámicas y considerar que $C(k) \approx 1$, donde $k = \omega c/2U_\infty$. La superficie de control tiene el eje de charnela a $3/4$ de la cuerda desde el borde de ataque ($\Lambda_3 = 0{,}5$) de forma que los parámetros $T_{10} \approx 2$ y $T_{11} \approx 1/2$.

1. Demostrar que el movimiento del perfil de la cola horizontal se puede expresar como una traslación de valor $h(t) = (l_T + c/4)\,\alpha(t)$ y una rotación de valor $\alpha(t)$.

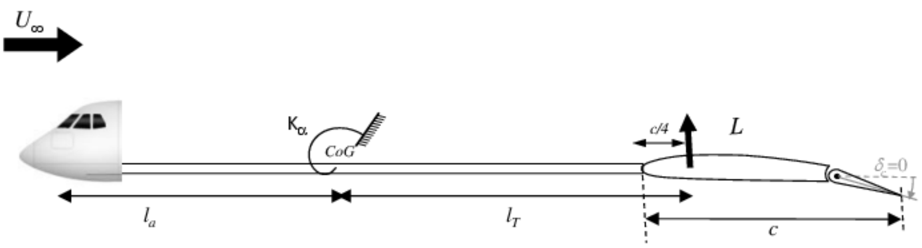
2. Demostrar que las fuerzas aerodinámicas por unidad de envergadura se pueden expresar como una sustentación en el punto $1/4$ de la cuerda del perfil (ver figura) proporcional a α, $t_0\dot{\alpha}$, δ_c y $t_0\dot{\delta}_c$. La fuerza total en la cola horizontal se calculará de forma simplificada multiplicando la fuerza aerodinámica por unidad de envergadura por la envergadura de la cola b.

3. Establecer la ecuación dinámica de equilibrio de momentos, despreciando el amortiguamiento estructural y considerando únicamente la aerodinámica de la cola horizontal (*). Despreciar los terminos inerciales asociados a la rotación de la superficie de control.

   (*) Las fuerzas aerodinámicas del resto de la aeronave se modelizan con el muelle en el CoG de valor K_α.

4. Asumir movimiento armónico de la superficie de control $\delta_c = \tilde{\delta}_c e^{i\omega t}$. Simplificar la ecuación del apartado anterior con esta hipótesis y calcular la función de respuesta en frecuencia $H_{\alpha\delta}(k)$ de la relación $\tilde{\alpha}/\tilde{\delta}_c$. Utilizar el parámetro adimensional $\mu = I_\alpha / \left[4\pi\rho_\infty \left(\frac{c}{2}\right)^5 AR \frac{l_T}{c/2}\right]$, donde $AR = b/c$, siendo b la envergadura de la cola horizontal.

5. Calcular la función de respuesta en frecuencia de la aceleración en la cabina de pilotos a_p, es decir, $H_{a\delta} = \tilde{a}_p/\tilde{\delta}_c$.



NOTA: Despreciando los términos no circulatorios (o de masa aparente), las cargas aerodinámicas de un perfil oscilando en flexión y torsión son:

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{Q}_h}{q_\infty c/2} &\approx -4\pi C(k)\left\{\frac{t_0\dot{h}}{c/2} + \alpha + \left(\frac{1}{2} - \Lambda_1\right) t_0\dot{\alpha} + \frac{T_{10}}{\pi}\delta_c + \frac{T_{11}}{2\pi} t_0\dot{\delta}_c\right\} \\
\frac{\tilde{Q}_\alpha}{q_\infty (c/2)^2} &\approx 4\pi\left(\frac{1}{2} + \Lambda_1\right) C(k)\left\{\frac{t_0\dot{h}}{c/2} + \alpha + \left(\frac{1}{2} - \Lambda_1\right) t_0\dot{\alpha} + \frac{T_{10}}{\pi}\delta_c + \frac{T_{11}}{2\pi} t_0\dot{\delta}_c\right\}
\end{aligned}$$

SOLUCIÓN:

Apartado 1:
Una rotación positiva $\dot{\alpha}$ respecto al punto O da lugar a una distribución lineal de velocidades en el perfil que se puede construir componiendo la velocidad en el punto medio $(l_T + c/4)\,\dot{\alpha}$ y una rotación incremental que generaría una velocidad en el borde de salida de la forma $[(l_T + 3c/4) - (l_T + c/4)]\,\dot{\alpha} = (c/2)\,\dot{\alpha}$, es decir, una rotación del perfil respecto al punto medio de valor $\dot{\alpha}$.
Apartado 2:
Observando las expresiones dadas de las fuerzas aerodinámicas generalizadas y despreciando los términos no circulatorios se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{Q}_h}{q_\infty c/2} &= -4\pi\left\{\frac{t_0}{c/2}\dot{h} + \alpha + \frac{t_0}{2}\dot{\alpha} + \frac{2}{\pi}\delta_c + \frac{t_0}{4\pi}\dot{\delta}_c\right\} = -4\pi\left\{\frac{t_0}{c/2}\left(l_T + \frac{c}{4}\right)\dot{\alpha} + \alpha + \frac{t_0}{2}\dot{\alpha} + \frac{2}{\pi}\delta_c + \frac{t_0}{4\pi}\dot{\delta}_c\right\} = \\ &= -4\pi\left\{\alpha + \left(\frac{l_T}{c/2} + 1\right)t_0\dot{\alpha} + \frac{2}{\pi}\delta_c + \frac{1}{4\pi}t_0\dot{\delta}_c\right\}\end{aligned}$$

La expresión de Q_α representa el momento respecto al eje elástico producido por la fuerza Q_h actuando en el punto $c/4$.
Apartado 3:
La ecuación de la dinámica queda:

$$\begin{aligned}I_\alpha\ddot{\alpha} \quad + K_\alpha\alpha = &\quad -2\pi q_\infty c b l_T\left\{\alpha + \left(\frac{l_T}{c/2} + 1\right)t_0\dot{\alpha} + \frac{2}{\pi}\delta_c + \frac{1}{4\pi}t_0\dot{\delta}_c\right\} = \\ = &\quad -2\pi\rho_\infty\frac{U_\infty^2}{(c/2)^2}\left(\frac{c}{2}\right)^5\frac{b}{c/2}\frac{l_T}{c/2}\left\{\alpha + \left(\frac{l_T}{c/2} + 1\right)t_0\dot{\alpha} + \frac{2}{\pi}\delta_c + \frac{1}{4\pi}t_0\dot{\delta}_c\right\} \\ = &\quad -\left[4\pi\rho_\infty\left(\frac{c}{2}\right)^5 AR\frac{l_T}{c/2}\right]\frac{U_\infty^2}{(c/2)^2}\left\{\alpha + \left(\frac{l_T}{c/2} + 1\right)t_0\dot{\alpha} + \frac{2}{\pi}\delta_c + \frac{1}{4\pi}t_0\dot{\delta}_c\right\}\end{aligned}$$

Apartado 4:
La ecuación anterior en el dominio de la frecuencia queda de la siguiente forma.

$$-\tilde{\alpha} + \quad \left(\tfrac{\omega_\alpha}{\omega}\right)^2\tilde{\alpha} = - \quad \frac{1}{\mu k^2}\left\{\tilde{\alpha} + \left(\frac{l_T}{c/2} + 1\right)ik\tilde{\alpha} + \frac{2}{\pi}\tilde{\delta}_c + \frac{1}{4\pi}ik\tilde{\delta}_c\right\}$$

La relación entre el ángulo de ataque y la rotación de la superficie de control en el dominio de la frecuencia (función de transferencia) se escribe como:

$$\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\delta}_c} \quad = H_{\alpha\delta}(k) = \quad \frac{\dfrac{1}{\mu k^2}\left(\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{ik}{4\pi}\right)}{1 - \left(\dfrac{k_\alpha}{k}\right)^2 - \dfrac{1}{\mu k^2}\left[1 + ik\left(\dfrac{l_T}{c/2} + 1\right)\right]}$$

donde $k_\alpha = \omega_\alpha c/2U_\infty$.
Apartado 5:
La aceleración en cabina de pilotos es $l_p\ddot{\alpha}$:

$$l_p\ddot{\alpha} = -l_p\omega^2\tilde{\alpha}e^{i\omega t} = -\frac{l_p}{c/2}\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2\omega^2}{U_\infty}\frac{U_\infty^2}{c/2}\tilde{\alpha} = -k^2\frac{l_p}{c/2}\frac{U_\infty^2}{c/2}\tilde{\alpha}$$

y la función de respuesta en frecuencia $H_{a\delta}(k)$ queda:

$$H_{a\delta}(k) = \frac{\tilde{a}_p}{\tilde{\delta}_c} = -\frac{U_\infty^2}{c/2}\frac{l_p}{c/2}\frac{\dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{ik}{4\pi}\right)}{1 - \left(\dfrac{k_\alpha}{k}\right)^2 - \dfrac{1}{\mu k^2}\left[1 + ik\left(\dfrac{l_T}{c/2} + 1\right)\right]}$$