test3v3.pdf

inacoolway

Laboratorio de Computación Científica

1º Grado en Física

Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid

Nombre:

LCC. Test 3 (curso 2020 -2021) [1]

Problema 1. El método iterativo de Richardson para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales emplea la siguiente fórmula de recurrencia:

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} + \omega\left(b - Ax^{(s)}\right), \tag{1}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$ representan respectivamente la matriz de coeficientes y el vector columna de términos independientes del sistema de ecuaciones $Ax = b$ de orden $n \in \mathbb{N}$, y $x^{(s)} \in \mathbb{R}^n$ es el vector solución en la iteración $s \in \mathbb{N}$. El parámetro $\omega \in \mathbb{R}$ juega el mismo papel que el factor de relajación en los métodos amortiguados y debe ajustarse para asegurar la convergencia del método.

1. **1 punto.** Reescribe la fórmula de recurrencia del método Richardson (ecuación 1) en la forma matricial estándar,
$$x^{(s+1)} = f + Hx^{(s)}. \tag{2}$$

2. **2 puntos.** Construye una función en Matlab que implemente el método de Richardson empleando la forma matricial estándar, es decir, en cada iteración aplicamos la ecuación (2). La función deberá tomar como variables de entrada:

   a) La matriz de coeficientes.
   b) El valor inicial $x^{(0)}$.
   c) El vector de términos independientes.
   d) Número máximo de iteraciones a realizar.
   e) Tolerancia mínima para el error entre iteraciones sucesivas.
   f) Un valor para el parámetro ω.

   Así mismo, la función deberá devolver como variables de salida:

   a) La solución del sistema.
   b) La tolerancia alcanzada.
   c) El número de iteraciones empleado en obtener la solución.

3. **2 puntos.** Emplea los métodos de Richardson, Jacobi y Gauss-Seidel para obtener la solución del sistema de ecuaciones
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 23 \\ 1 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

   Utiliza un valor $\omega = 0{,}16$ para el método de Richardson. Toma una tolerancia de 10^{-5} y un valor valor inicial $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ para los tres métodos.

   Clasifica los tres métodos de mejor a peor, tomando como criterio el número de iteraciones empleado por cada uno de ellos para alcanzar la solución.

4. **2 punto.** Haz una gráfica del radio espectral de H en función del parámetro ω para el método de Richardson y el sistema de ecuaciones del apartado anterior. Emplea para ello valores de ω comprendidos en el intervalo [0,01 0,9], toma una separación entre valores de 0,01. Representa cada valor como un punto independiente.

   Determina, a la vista de la gráfica, si sería posible encontrar un valor de ω para el que se alcance la solución del sistema en menos iteraciones, manteniendo la misma tolerancia. Indica, también de acuerdo con el gráfico, cuál es mayor valor de ω admisible. Razona las respuestas.

[1] Crea las funciones necesarias en ficheros .m y da los resultados y tus comentarios en un *live script*.

1 de diciembre de 2020

Problema 2. El método de Gauss-Jordan permite resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x, b \in \mathbb{R}^n$. Si en lugar de emplear un vector columna de términos independientes, sustituimos b por una matriz B de dimensión $n \times m$, el método nos permite obtener como resultado una matriz de soluciones X también de dimension $n \times m$: $AX = B$. Cada columna, x_j, $j \in \{1, \ldots, m\}$, de la matriz X representa la solución de sistema $Ax_j = b_j$, donde b_j es la columna correspondiente de la matriz B. Es decir: hemos resuelto m sistemas de ecuaciones simultáneamente.

1. **2 puntos.** Emplea el método de Gauss-Jordan para obtener la solución de $AX = B$, donde A es la matriz de coeficientes del Problema 1 y B es la matriz identidad de dimension 4×4.

2. **1 punto.** ¿Sabrías decir que relación hay entre las matrices X y A?