

## Soluciones-ene-2018

Análisis Matemático (Universidad Autónoma de Madrid)

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a map or a stylized 'C'. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

1. Sea  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\pi(x, y) = x$ .

a) ¿Es  $\pi(A)$  un abierto de  $\mathbb{R}$  para todo abierto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ ?

b) ¿Es  $\pi(C)$  un cerrado de  $\mathbb{R}$  para todo cerrado  $C$  de  $\mathbb{R}^2$ ?

En caso afirmativo da una demostración. En caso negativo proporciona un contraejemplo.

**Solución.** La respuesta al apartado a) es sí, para lo que damos una demostración. Dada cualquier  $x \in \pi(A)$ , existe un  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $(x, y) \in A$ . Como  $A$  es abierto por hipótesis, hay un radio positivo  $r > 0$  tal que  $B((x, y), r) \subseteq A$ . Un diámetro de esta bola es el intervalo horizontal  $(x - r, x + r) \times \{y\}$ , de donde  $(x - r, x + r) \subseteq \pi(A)$ . Como  $x$  era cualquier punto de  $\pi(A)$ , queda probado que  $\pi(A)$  es un abierto de  $\mathbb{R}$ .

La respuesta al apartado b) es no, para lo que damos un contraejemplo. Al ser  $\varphi(x, y) = xy$  una función continua, la siguiente preimagen es un cerrado de  $\mathbb{R}^2$ :

$$C = \varphi^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) : xy = 1\}.$$

De hecho  $C$  es la hipérbola estándar en el plano. La proyección  $\pi(C)$  sobre el eje de abscisas es el conjunto  $\pi(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , que no es cerrado.

---

2. Se considera la función  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como sigue:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Determina, razonadamente, la continuidad y diferenciabilidad de  $h$  en  $(0, 0)$ .

**Solución.** Tenemos la cota evidente  $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ , que nos proporciona esta otra:

$$|f(x, y)| \leq |x + y|,$$

de la que se deduce fácilmente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

luego  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .

Para estudiar la diferenciabilidad, empezamos observando que  $f$  es homogénea de grado 1. Esto implica que para todo vector  $v \in \mathbb{R}^2$  existe la derivada  $D_v f(0, 0)$  y de hecho  $D_v f(0, 0) = f(v)$ . Pero la función  $f(v)$  no es lineal, es decir no existen constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que se cumpla lo siguiente para todo  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\frac{(v_1 + v_2) v_1^2}{v_1^2 + v_2^2} = a v_1 + b v_2.$$

Entonces  $f$  no es diferenciable en  $(0, 0)$  porque  $v \mapsto D_v f(0, 0)$  no es lineal.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

3. Sea  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x, y, z) = x^2 - z \left( \frac{z^2}{3} - 1 \right)$ .

- a) Demuestra que  $M = \{ (x, y, z) : g(x, y, z) = 0, z < 1 \}$  es una variedad en  $\mathbb{R}^3$  y di, razonadamente, cuál es su dimensión.
- b) Comprueba que el punto  $a = (0, 7, -\sqrt{3})$  está en  $M$  y di, razonadamente, qué tipo de grafo es  $M$  en un entorno pequeño  $U$  de  $a$  (es decir, qué variables entre las  $x, y, z$  se despejan, en  $M \cap U$ , como funciones diferenciables de las otras variables).
- c) Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x, y, z) = x^2 + y^2$ . Halla los puntos críticos de  $f = F|_M$  y, para cada uno de ellos, estudia si es máximo local de  $f$ , mínimo local de  $f$  o ninguna de las dos cosas.

**Solución.** a) El conjunto  $M$  no es vacío, por ejemplo  $(0, 0, 0) \in M$ . Entonces, por el teorema de la función implícita, una condición suficiente para que  $M$  sea una variedad es que el gradiente  $\nabla g$  no se anule en ningún punto de  $M$ . Calculamos  $\nabla g \equiv (2x, 0, 1 - z^2)$ , luego los puntos donde se anula el gradiente son los  $(0, y, \pm 1)$ , pero:

$$g(0, y, \pm 1) = \pm \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \neq 0,$$

luego ninguno de los puntos  $(0, y, \pm 1)$  está en  $M$ . Esto prueba que  $M$  es una variedad en  $\mathbb{R}^3$  y:

$$\dim M = 3 - \text{número de ecuaciones} = 3 - 1 = 2,$$

es decir que  $M$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3$ .

b) Calculamos  $g(a) = 0^2 + \sqrt{3} \left( \frac{3}{3} - 1 \right) = 0$  y constatamos que  $-\sqrt{3} < 1$ , luego  $a \in M$ . De las tres derivadas parciales:

$$g_x(a) = 0, \quad g_y(a) = 0, \quad g_z(a) = -2,$$

sólo  $g_z(a)$  es no nula, luego en un trocito de  $M$  rodeando al punto  $a$  sólo la variable  $z$  puede despejarse como una función diferenciable de las variables  $(x, y)$  (las cuales recorren un abierto de  $\mathbb{R}_{xy}^2$  rodeando a  $(7, -\sqrt{3})$ ).

c) Un punto  $p \in M$  es crítico para  $f = F|_M$  si y sólo si tenemos  $\nabla F(p) = \lambda \nabla g(p)$ , para un  $\lambda \in \mathbb{R}$  que llamamos *multiplicador de Lagrange* de  $p$ . Como  $\nabla F \equiv (2x, 2y, 0)$ , las condiciones  $p \in M$  y  $\nabla F(p) = \lambda \nabla g(p)$  equivalen al sistema:

$$\left. \begin{array}{l} z < 1 \\ x^2 - z \left( \frac{z^2}{3} - 1 \right) = 0 \\ 2x = \lambda(2x) \\ 2y = \lambda \cdot 0 \\ 0 = \lambda(1 - z^2) \end{array} \right\}$$

formado por una desigualdad estricta y cuatro ecuaciones. La tercera ecuación nos dice que  $y = 0$  en todo punto crítico, es decir que son todos de la forma  $(x, 0, z)$ . La segunda ecuación nos sugiere considerar dos casos, según que  $x$  sea nulo o no nulo.

**Caso  $x \neq 0$ .** En este caso la segunda ecuación fuerza  $\lambda = 1$ , lo que convierte la cuarta ecuación en  $0 = 1 - z^2$ , de la que descartamos la solución  $z = 1$  porque no cumple la desigualdad estricta, y los puntos críticos con  $x \neq 0$  son de la forma  $(x, 0, -1)$ . Además  $z = -1$  convierte la primera ecuación en  $x^2 - \frac{2}{3} = 0$ , luego en este caso hay dos puntos críticos:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



En total  $f = F|_M$  tiene cuatro puntos críticos:  $p_+$ ,  $p_-$ ,  $\mathbf{0}$  y  $q$ . Para estudiarlos, empezamos calculando las matrices hessianas:

$$\text{Hess}(F) = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Hess}(g) = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & -2z \end{bmatrix}.$$

Si  $p \in M$  es un punto crítico de  $F|_M$ , con multiplicador de Lagrange  $\lambda$ , entonces la hessiana intrínseca en  $p$  es la restricción al plano  $T_pM$  de la forma cuadrática  $v \mapsto v^t A v$ , siendo  $A = \text{Hess}(F)_p - \lambda \text{Hess}(g)_p$ .

En los puntos  $p_{\pm}$  es  $\nabla g = \left( \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}, 0, 0 \right)$ , luego:  $T_{p_+}M = T_{p_-}M =$  plano generado por  $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Además estos puntos críticos tienen  $\lambda = 1$  y les corresponde la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} - (1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & -2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}.$$

En la base  $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  de los planos tangentes  $T_{p_+}M = T_{p_-}M$ , la hessiana intrínseca tiene la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_2^t A \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2^t A \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3^t A \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3^t A \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & -2 \end{pmatrix},$$

que es indefinida y no degenerada, luego  $p_+$  y  $p_-$  son sillas no degeneradas de  $F|_M$ . No son ni máximo ni mínimo local.

Los gradientes  $\nabla g(\mathbf{0}) = (0, 0, 1)$  y  $\nabla g(q) = (0, 0, -2)$  nos dan  $T_{\mathbf{0}}M = T_qM =$  plano generado por  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ . Como estos puntos críticos tienen  $\lambda = 0$ , les corresponde la matriz  $A = \text{Hess}(F)$ . En la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  de los planos tangentes  $T_{\mathbf{0}}M = T_qM$ , la hessiana intrínseca tiene matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^t \text{Hess}(F) \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^t \text{Hess}(F) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2^t \text{Hess}(F) \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^t \text{Hess}(F) \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix},$$

que es definida positiva, luego  $\mathbf{0}$  y  $q$  son mínimos locales estrictos de  $F|_M$ .

4. Sea  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2, 0 < z < 1\}$ .

- Describe, razonadamente, el borde de  $S$ .
- Elige una orientación  $\mathcal{O}$  para  $S$  y determina, razonadamente, la orientación inducida en el borde.
- Con la orientación elegida, calcula la integral  $\int_{(S, \mathcal{O})} d\omega$ , siendo:

$$\omega = (z^2 - z) e^{x+2y} dx + (x + z) dy + \log(3 + x) dz.$$

**Solución.** a) Como conjunto  $\partial S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \in \{0, 1\}\}$  es la unión de dos circunferencias  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$  dadas por:

$$\Gamma_0 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 2\}, \quad \Gamma_1 = \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 = 2 - 1^2 = 1\}.$$

b) El campo de vectores  $\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = (2x, 2y, 2z)$  es normal a la superficie  $S$ . Por lo tanto una normal unitaria es  $\nu = (1/\sqrt{2}) \cdot (x, y, z)|_S$ . Con ella determinamos una orientación  $\mathcal{O}_p$  en cada plano tangente  $T_pS$  de la siguiente manera: una base ordenada  $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$  de  $T_pS$  pertenece a la orientación  $\mathcal{O}_p$  si  $\det[\nu(p) | \mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2] > 0$ .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



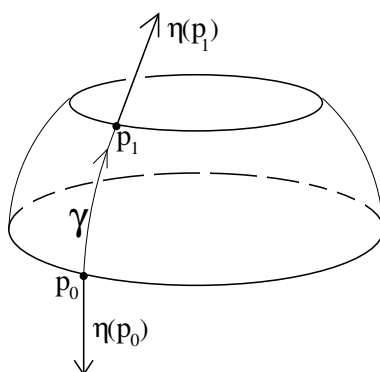
c) El teorema de Stokes dice que, si damos a  $\partial S$  la orientación inducida de la  $\mathcal{O}$ , entonces:

$$\int_{(S, \mathcal{O})} d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

Se trata, pues, de determinar la orientación de  $\partial S = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  inducida de la orientación  $\mathcal{O}$  de  $S$ . Elegimos un punto  $p_0 \in \Gamma_0$  y otro  $p_1 \in \Gamma_1$  y determinamos la orientación inducida en  $T_{p_0}\Gamma_0$  y en  $T_{p_1}\Gamma_1$ .

En el punto  $p_0 = (\sqrt{2}, 0, 0) \in \Gamma_0$  es  $\nu(p_0) = (1, 0, 0)$  y  $T_{p_0}S$  es el plano generado por  $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . A su vez la recta  $T_{p_0}\Gamma_0$  es la del vector  $\mathbf{e}_2$ . Se deduce que la conormal exterior  $\eta(p_0)$  es igual a  $\pm\mathbf{e}_3$ , de hecho se ve fácilmente que  $\eta(p_0) = -\mathbf{e}_3$ , porque el opuesto  $\mathbf{e}_3$  es la velocidad en  $t = 0$  del camino  $\gamma(t) = \sqrt{2}(\cos t, 0, \sin t)$ , que para  $t > 0$  se mete dentro de  $S$ .

Cuando  $t = \pi/4$  el camino  $\gamma(t)$  llega al punto  $p_1 = (1, 0, 1) \in \Gamma_1$  con velocidad  $\gamma'(\pi/4) = (-1, 0, 1)$ . Como  $\nu(p_1) = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$ , el plano  $T_{p_1}S$  es el generado por  $\{\gamma'(\pi/4), \mathbf{e}_2\}$ . A su vez la recta  $T_{p_1}\Gamma_1$  es la del vector  $\mathbf{e}_2$ , luego  $\gamma'(\pi/4)$  es ortogonal a  $\Gamma_1$  en  $p_1$ . La conormal exterior es  $\eta(p_1) = \gamma'(\pi/4)/\|\gamma'(\pi/4)\|$  porque este vector apunta hacia afuera de  $S$ , ya que  $\gamma(t)$  se sale de  $S$  para  $t > \pi/4$ . Es decir  $\eta(p_1) = (-1, 0, 1)/\sqrt{2}$ .



Como  $\det[\nu(p_0) | \eta(p_0) | \mathbf{e}_2] = \det[\mathbf{e}_1 | -\mathbf{e}_3 | \mathbf{e}_2] = 1 > 0$ , una parametrización  $\alpha(t)$  de  $\Gamma_0$  que tenga  $\alpha(0) = p_0$  y  $\alpha'(0) = c\mathbf{e}_2$  con  $c > 0$  es compatible con la orientación de  $\Gamma_0$  inducida de la  $\mathcal{O}$ . Elegimos ésta:

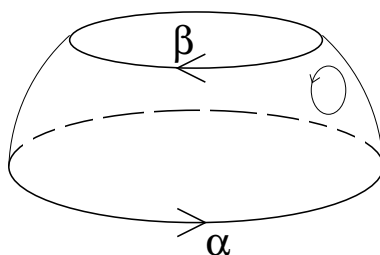
$$\alpha(t) = \sqrt{2} \cdot (\cos t, \sin t, 0) \quad , \quad t \in [0, 2\pi].$$

Como:

$$\det[\nu(p_1) | \eta(p_1) | -\mathbf{e}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 > 0,$$

una parametrización  $\beta(t)$  de  $\Gamma_1$  que tenga  $\beta(0) = p_1$  y  $\beta'(0) = -c'\mathbf{e}_2$  con  $c' > 0$  es compatible con la orientación de  $\Gamma_1$  inducida de la  $\mathcal{O}$ . Elegimos ésta:

$$\beta(t) = (\cos t, -\sin t, 1) \quad , \quad t \in [0, 2\pi].$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**