

Soluciones-ene-2018

Análisis Matemático (Universidad Autónoma de Madrid)

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The text is set against a light blue, starburst-like background that tapers to the right. Below the text is a thick, orange horizontal bar that also tapers to the right, creating a sense of motion or a banner.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

1. Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi(x, y) = x$.

a) ¿Es $\pi(A)$ un abierto de \mathbb{R} para todo abierto A de \mathbb{R}^2 ?

b) ¿Es $\pi(C)$ un cerrado de \mathbb{R} para todo cerrado C de \mathbb{R}^2 ?

En caso afirmativo da una demostración. En caso negativo proporciona un contraejemplo.

Solución. La respuesta al apartado a) es sí, para lo que damos una demostración. Dada cualquier $x \in \pi(A)$, existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in A$. Como A es abierto por hipótesis, hay un radio positivo $r > 0$ tal que $B((x, y), r) \subseteq A$. Un diámetro de esta bola es el intervalo horizontal $(x - r, x + r) \times \{y\}$, de donde $(x - r, x + r) \subseteq \pi(A)$. Como x era cualquier punto de $\pi(A)$, queda probado que $\pi(A)$ es un abierto de \mathbb{R} .

La respuesta al apartado b) es no, para lo que damos un contraejemplo. Al ser $\varphi(x, y) = xy$ una función continua, la siguiente preimagen es un cerrado de \mathbb{R}^2 :

$$C = \varphi^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) : xy = 1\}.$$

De hecho C es la hipérbola estándar en el plano. La proyección $\pi(C)$ sobre el eje de abscisas es el conjunto $\pi(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, que no es cerrado.

2. Se considera la función $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Determina, razonadamente, la continuidad y diferenciabilidad de h en $(0, 0)$.

Solución. Tenemos la cota evidente $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, que nos proporciona esta otra:

$$|f(x, y)| \leq |x + y|,$$

de la que se deduce fácilmente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

luego f es continua en $(0, 0)$.

Para estudiar la diferenciabilidad, empezamos observando que f es homogénea de grado 1. Esto implica que para todo vector $v \in \mathbb{R}^2$ existe la derivada $D_v f(0, 0)$ y de hecho $D_v f(0, 0) = f(v)$. Pero la función $f(v)$ no es lineal, es decir no existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que se cumpla lo siguiente para todo $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{(v_1 + v_2) v_1^2}{v_1^2 + v_2^2} = a v_1 + b v_2.$$

Entonces f no es diferenciable en $(0, 0)$ porque $v \mapsto D_v f(0, 0)$ no es lineal.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

3. Sea $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y, z) = x^2 - z \left(\frac{z^2}{3} - 1 \right)$.

- Demuestra que $M = \{ (x, y, z) : g(x, y, z) = 0, z < 1 \}$ es una variedad en \mathbb{R}^3 y di, razonadamente, cuál es su dimensión.
- Comprueba que el punto $a = (0, 7, -\sqrt{3})$ está en M y di, razonadamente, qué tipo de grafo es M en un entorno pequeño U de a (es decir, qué variables entre las x, y, z se despejan, en $M \cap U$, como funciones diferenciables de las otras variables).
- Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = x^2 + y^2$. Halla los puntos críticos de $f = F|_M$ y, para cada uno de ellos, estudia si es máximo local de f , mínimo local de f o ninguna de las dos cosas.

Solución. a) El conjunto M no es vacío, por ejemplo $(0, 0, 0) \in M$. Entonces, por el teorema de la función implícita, una condición suficiente para que M sea una variedad es que el gradiente ∇g no se anule en ningún punto de M . Calculamos $\nabla g \equiv (2x, 0, 1 - z^2)$, luego los puntos donde se anula el gradiente son los $(0, y, \pm 1)$, pero:

$$g(0, y, \pm 1) = \pm \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \neq 0,$$

luego ninguno de los puntos $(0, y, \pm 1)$ está en M . Esto prueba que M es una variedad en \mathbb{R}^3 y:

$$\dim M = 3 - \text{número de ecuaciones} = 3 - 1 = 2,$$

es decir que M es una superficie en \mathbb{R}^3 .

b) Calculamos $g(a) = 0^2 + \sqrt{3} \left(\frac{3}{3} - 1 \right) = 0$ y constatamos que $-\sqrt{3} < 1$, luego $a \in M$. De las tres derivadas parciales:

$$g_x(a) = 0, \quad g_y(a) = 0, \quad g_z(a) = -2,$$

sólo $g_z(a)$ es no nula, luego en un trocito de M rodeando al punto a sólo la variable z puede despejarse como una función diferenciable de las variables (x, y) (las cuales recorren un abierto de \mathbb{R}_{xy}^2 rodeando a $(7, -\sqrt{3})$).

c) Un punto $p \in M$ es crítico para $f = F|_M$ si y sólo si tenemos $\nabla F(p) = \lambda \nabla g(p)$, para un $\lambda \in \mathbb{R}$ que llamamos *multiplicador de Lagrange* de p . Como $\nabla F \equiv (2x, 2y, 0)$, las condiciones $p \in M$ y $\nabla F(p) = \lambda \nabla g(p)$ equivalen al sistema:

$$\left. \begin{array}{l} z < 1 \\ x^2 - z \left(\frac{z^2}{3} - 1 \right) = 0 \\ 2x = \lambda(2x) \\ 2y = \lambda \cdot 0 \\ 0 = \lambda(1 - z^2) \end{array} \right\}$$

formado por una desigualdad estricta y cuatro ecuaciones. La tercera ecuación nos dice que $y = 0$ en todo punto crítico, es decir que son todos de la forma $(x, 0, z)$. La segunda ecuación nos sugiere considerar dos casos, según que x sea nulo o no nulo.

Caso $x \neq 0$. En este caso la segunda ecuación fuerza $\lambda = 1$, lo que convierte la cuarta ecuación en $0 = 1 - z^2$, de la que descartamos la solución $z = 1$ porque no cumple la desigualdad estricta, y los puntos críticos con $x \neq 0$ son de la forma $(x, 0, -1)$. Además $z = -1$ convierte la primera ecuación en $x^2 - \frac{2}{3} = 0$, luego en este caso hay dos puntos críticos:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

En total $f = F|_M$ tiene cuatro puntos críticos: p_+ , p_- , $\mathbf{0}$ y q . Para estudiarlos, empezamos calculando las matrices hessianas:

$$\text{Hess}(F) = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Hess}(g) = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & -2z \end{bmatrix}.$$

Si $p \in M$ es un punto crítico de $F|_M$, con multiplicador de Lagrange λ , entonces la hessiana intrínseca en p es la restricción al plano $T_p M$ de la forma cuadrática $v \mapsto v^t A v$, siendo $A = \text{Hess}(F)_p - \lambda \text{Hess}(g)_p$.

En los puntos p_{\pm} es $\nabla g = \left(\pm 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}, 0, 0 \right)$, luego: $T_{p_+} M = T_{p_-} M =$ plano generado por $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Además estos puntos críticos tienen $\lambda = 1$ y les corresponde la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} - (1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & -2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}.$$

En la base $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de los planos tangentes $T_{p_+} M = T_{p_-} M$, la hessiana intrínseca tiene la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_2^t A \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2^t A \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3^t A \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3^t A \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & -2 \end{pmatrix},$$

que es indefinida y no degenerada, luego p_+ y p_- son sillas no degeneradas de $F|_M$. No son ni máximo ni mínimo local.

Los gradientes $\nabla g(\mathbf{0}) = (0, 0, 1)$ y $\nabla g(q) = (0, 0, -2)$ nos dan $T_{\mathbf{0}} M = T_q M =$ plano generado por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Como estos puntos críticos tienen $\lambda = 0$, les corresponde la matriz $A = \text{Hess}(F)$. En la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de los planos tangentes $T_{\mathbf{0}} M = T_q M$, la hessiana intrínseca tiene matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^t \text{Hess}(F) \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^t \text{Hess}(F) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2^t \text{Hess}(F) \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^t \text{Hess}(F) \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix},$$

que es definida positiva, luego $\mathbf{0}$ y q son mínimos locales estrictos de $F|_M$.

4. Sea $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2, 0 < z < 1\}$.

- Describe, razonadamente, el borde de S .
- Elige una orientación \mathcal{O} para S y determina, razonadamente, la orientación inducida en el borde.
- Con la orientación elegida, calcula la integral $\int_{(S, \mathcal{O})} d\omega$, siendo:

$$\omega = (z^2 - z) e^{x+2y} dx + (x + z) dy + \log(3 + x) dz.$$

Solución. a) Como conjunto $\partial S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \in \{0, 1\}\}$ es la unión de dos circunferencias $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ dadas por:

$$\Gamma_0 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 2\}, \quad \Gamma_1 = \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 = 2 - 1^2 = 1\}.$$

b) El campo de vectores $\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = (2x, 2y, 2z)$ es normal a la superficie S . Por lo tanto una normal unitaria es $\nu = (1/\sqrt{2}) \cdot (x, y, z)|_S$. Con ella determinamos una orientación \mathcal{O}_p en cada plano tangente $T_p S$ de la siguiente manera: una base ordenada $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ de $T_p S$ pertenece a la orientación \mathcal{O}_p si $\det[\nu(p) | \mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2] > 0$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

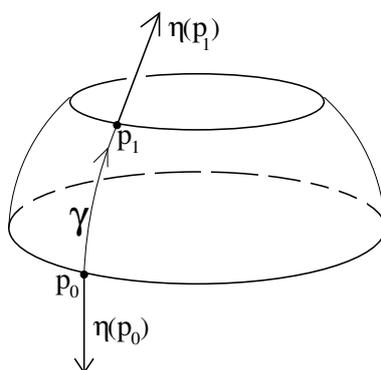
c) El teorema de Stokes dice que, si damos a ∂S la orientación inducida de la \mathcal{O} , entonces:

$$\int_{(S, \mathcal{O})} d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

Se trata, pues, de determinar la orientación de $\partial S = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ inducida de la orientación \mathcal{O} de S . Elegimos un punto $p_0 \in \Gamma_0$ y otro $p_1 \in \Gamma_1$ y determinamos la orientación inducida en $T_{p_0}\Gamma_0$ y en $T_{p_1}\Gamma_1$.

En el punto $p_0 = (\sqrt{2}, 0, 0) \in \Gamma_0$ es $\nu(p_0) = (1, 0, 0)$ y $T_{p_0}S$ es el plano generado por $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. A su vez la recta $T_{p_0}\Gamma_0$ es la del vector \mathbf{e}_2 . Se deduce que la conormal exterior $\eta(p_0)$ es igual a $\pm\mathbf{e}_3$, de hecho se ve fácilmente que $\eta(p_0) = -\mathbf{e}_3$, porque el opuesto \mathbf{e}_3 es la velocidad en $t = 0$ del camino $\gamma(t) = \sqrt{2}(\cos t, 0, \sin t)$, que para $t > 0$ se mete dentro de S .

Cuando $t = \pi/4$ el camino $\gamma(t)$ llega al punto $p_1 = (1, 0, 1) \in \Gamma_1$ con velocidad $\gamma'(\pi/4) = (-1, 0, 1)$. Como $\nu(p_1) = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$, el plano $T_{p_1}S$ es el generado por $\{\gamma'(\pi/4), \mathbf{e}_2\}$. A su vez la recta $T_{p_1}\Gamma_1$ es la del vector \mathbf{e}_2 , luego $\gamma'(\pi/4)$ es ortogonal a Γ_1 en p_1 . La conormal exterior es $\eta(p_1) = \gamma'(\pi/4)/\|\gamma'(\pi/4)\|$ porque este vector apunta hacia afuera de S , ya que $\gamma(t)$ se sale de S para $t > \pi/4$. Es decir $\eta(p_1) = (-1, 0, 1)/\sqrt{2}$.



Como $\det[\nu(p_0) | \eta(p_0) | \mathbf{e}_2] = \det[\mathbf{e}_1 | -\mathbf{e}_3 | \mathbf{e}_2] = 1 > 0$, una parametrización $\alpha(t)$ de Γ_0 que tenga $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha'(0) = c\mathbf{e}_2$ con $c > 0$ es compatible con la orientación de Γ_0 inducida de la \mathcal{O} . Elegimos ésta:

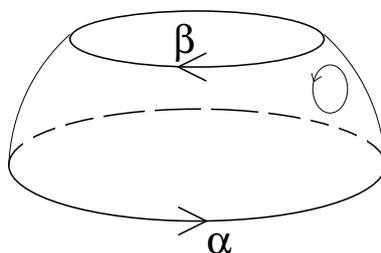
$$\alpha(t) = \sqrt{2} \cdot (\cos t, \sin t, 0) \quad , \quad t \in [0, 2\pi].$$

Como:

$$\det[\nu(p_1) | \eta(p_1) | -\mathbf{e}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 > 0,$$

una parametrización $\beta(t)$ de Γ_1 que tenga $\beta(0) = p_1$ y $\beta'(0) = -c'\mathbf{e}_2$ con $c' > 0$ es compatible con la orientación de Γ_1 inducida de la \mathcal{O} . Elegimos ésta:

$$\beta(t) = (\cos t, -\sin t, 1) \quad , \quad t \in [0, 2\pi].$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**