1. Preguntas de razonamiento (3 puntos)

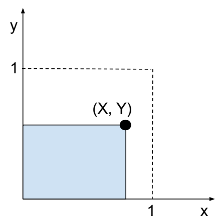
1.1. (1 punto) (a) (1/3 puntos) Demuestra, usando los 3 axiomas de Kolmogorov y los corolarios derivados que, para dos sucesos A y B se tiene $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$.

(b) (1/3 puntos) Indica si se puede simplificar de alguna forma el resultado si los sucesos A y B son independientes. (Nota: puedes hacer este apartado sin haber completado (a)).

(c) (1/3 puntos) Indica si se puede simplificar de alguna forma el resultado si los sucesos A y B son mutuamente excluyentes. (Nota: puedes hacer este apartado sin haber completado (a)).

1.2. (1 punto) Se eligen dos números al azar, X e Y, en el intervalo $[0, 1]$. Sea A la variable aleatoria "Área del rectángulo de lados paralelos a los ejes con vértices en el origen y (X, Y)" (ver Figura 1a). Razona cuál es la función de distribución de la variable aleatoria A.

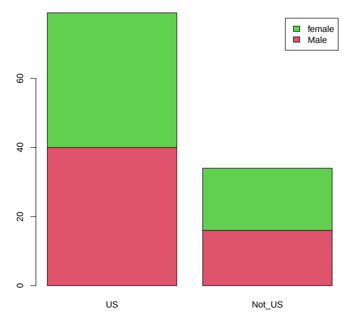
1.3. (1 punto) Se colocan al azar h bolas iguales en k urnas ($h > k$) numeradas del 1 al k. Razona cuál es la función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias U_1, U_2, ..., U_k; siendo U_i el número de bolas en la urna i-ésima. (Pista: al pedirse la distribución conjunta el problema no es un reparto).



(a) Ejercicio 2.2.

	oscar_no	oscar_yr	award	name	movie	age	birth_pl	birth_date
1	10	1938	Best actor	Spencer Tracy	Captains Courageous	37	US	1900-04-05
2	3	1931	Best actress	Norma Shearer	The Divorcee	28	Canada	1902-08-10
3	90	2018	Best actor	Gary Oldman	Darkest Hour	59	England	1958-03-21
4	22	1950	Best actress	Olivia de Havilland	The Heiress	33	Japan	1916-07-01
5	28	1956	Best actress	Anna Magnani	The Rose Tattoo	47	Italy	1908-03-07

(b) El *data.frame* de los Oscars.



(c) Gráfica deseada.

Figura 1: Figuras explicativas

2. Problemas (7 puntos)

2.1. (1.5 puntos) En una fábrica se fabrican parejas de tornillo y su correspondiente tuerca. Sean X e Y los diámetros (en mm) de un tornillo y su tuerca, respectivamente. Supongamos que tiene la función de densidad conjunta es

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{-2x}y^3 & 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) (0.75 puntos) Calcula c.

(b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un tornillo entre en su tuerca? (Puedes dejar el resultado en función de c; se entiende que un tornillo entra en su tuerca si su diametro es menor que el de la tuerca).

2.2. (1 punto) (a) (0.5 puntos) Tu vecino acaba de tener dos bebés. De alguna forma, te enteras de que uno de sus bebés es una niña. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro bebé también sea niña?

(b) (0.5 puntos) Otro de tus vecinos acaba de tener dos bebés. El vecino acuerda visitarte con uno de sus bebés. Para ello, elige a uno de los bebés al azar y se lo lleva consigo a la visita. El bebé resulta ser una niña. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro bebé también sea niña? (Pista: el resultado no es el mismo que en (a) por la elección del bebé).

2.3. (2 puntos) En un torneo de baloncesto participan 20 equipos con los que se forman 2 grupos de 10 equipos cada uno. Entre estos equipos hay 4 mucho mejores que los demás.

(a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que 2 de los mejores estén en un grupo y los otros 2 en el otro. Resuelve el problema matemáticamente.

(b) (1 punto) **[Problema en R]** Calcula la probabilidad de que los 4 mejores se encuentren en el mismo grupo. Resuelve el problema haciendo simulaciones en R. El resultado final debe guardarse en la variable *result* e imprimirse por pantalla.

2.4. (1.5 puntos) El gerente de un zoológico te contrata para que hagas algunos cálculos relativos a algunos de sus animales.

(a) (0.5 puntos) En el recinto de “grandes felinos” hay tres leones. Cada uno de estos leones necesita cierta cantidad de carne a la semana, con distribución normal de media 50 Kg y desviación típica de 5 Kg. Si el zoo ha encargado 175 Kg de carne, ¿cuál es la probabilidad de que todos los leones queden satisfechos? Haz el desarrollo matemático hasta donde sea posible e indica los comandos de R que te permitirían dar la respuesta final.

(b) (0.5 puntos) Para que el veterinario pueda atender a un oso enfermo es necesario dispararle 3 dardos tranquilizantes para que se duerma. Cuando el veterinario dispara un dardo, acierta con probabilidad 0.7. ¿Cuántos disparos esperarías realizar antes de que el oso se duerma? Define claramente las variables aleatorias relacionándolas con lo que pide el problema y detalla los pasos hasta alcanzar la respuesta final. En este apartado no es necesario usar R.

(c) (0.5 puntos) Sea X la cantidad de arenques que comen los delfines del zoo al día en Kgs. Cierto estudio sugiere que la distribución de X es

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda^3 x^2 e^{-\lambda x} \qquad \text{for } 0 \leq x \leq \infty$$

donde λ es un parámetro desconocido que queremos estimar. Usa el método de máxima verosimilitud para estimar λ si los últimos 6 días los delfines han comido 1.4, 0.3, 1.0, 0.6 y 0.7 Kgs.

2.5. (1 punto) **[Problema en R]** El *data.frame oscars* contiene datos sobre los actores y actrices ganadores de un Oscar (entre 1929 y 2012). La Figura 1b muestra parte del *data.frame* tal y como lo imprime R. Nos planteamos la siguiente idea: “ser estado-unidense influye positivamente, tanto para actrices como actores, en la probablidad de ganar un Oscar”. Vamos a explorar si esta idea es razonable o no.

(a) (1/2 puntos) Quédate con los datos referentes a las ediciones entre 1945 y 2000 (ambas incluidas) y elimina todas aquellas columnas que no sean necesarias para el apartado (b).

(b) (1/2 puntos) Crea un gráfico similar al mostrado en la Figura 1c (no tiene que ser exactamente igual). ¿Qué conclusiones puedes extraer de la Figura 1c? (Justifica brevemente).