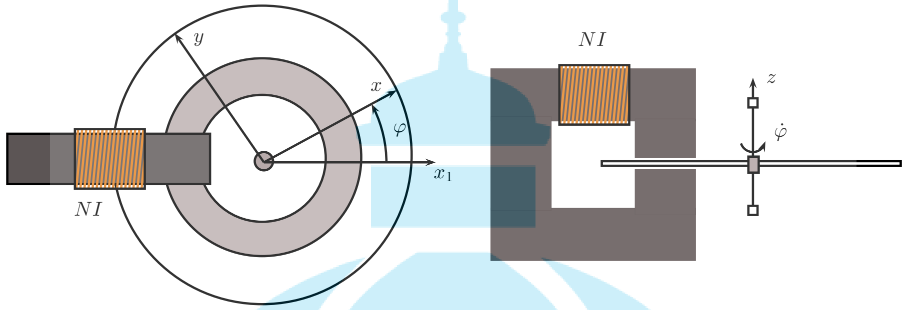
5017 ELECTROMAGNETISMO Examen del 30 de mayo de 2012. Segunda parte. Publicación de notas: 13 de junio de 2012.

Apellidos:____________________________________ **Nombre:**______________________ **Matrícula:**_______________

Ajuste su respuesta al espacio disponible y recuadre el resultado

Problema 1



Un circuito magnético lineal está formado por:

- Un bobinado de N vueltas por el que circula una intensidad $I(t)$.
- un núcleo de sección cuadrada de área S
- dos estrechos tramos de entrehierro
- un disco giratorio en el que se ha distribuido un material magnético de modo que la reluctancia total del circuito (incluyendo entrehierro, disco y núcleo) es:

$$\mathcal{R}(\varphi) = \frac{\mathcal{R}_0}{A + B \operatorname{sen}\varphi}$$

  donde φ es el ángulo girado por el disco, y $\mathcal{R}_0, A, B$ son constantes conocidas.

El disco se mueve con la ley $\varphi = \Omega t + \delta$ donde Ω, δ son constantes. Determine:

1. Flujo que atraviesa el circuito magnético en función de t, $I(t)$ y las constantes definidas en el enunciado.

   Dado que

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}}$$

   tenemos:

$$\boxed{\Phi = NI(t)\frac{A+B\operatorname{sen}(\Omega t+\delta)}{\mathcal{R}_0}}$$

2. Energía almacenada en el circuito magnético $U_m(t)$.

   Utilizamos la ecuación

$$U = \frac{N^2 I^2}{2\mathcal{R}}$$

$$\boxed{U = N^2 I^2(t)\frac{A+B\operatorname{sen}(\Omega t+\delta)}{2\mathcal{R}_0}}$$

3. Momento áxico N_z respecto al eje z de las fuerzas que recibe el disco del campo magnético.

   Aplicamos

$$N_z = \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

   para obtener

$$\boxed{N_z = N^2 I^2(t)\frac{B\cos(\Omega t+\delta)}{2\mathcal{R}_0}}$$

4. A partir de este punto suponga que $I(t) = I_0 \cos\omega t$ (I_0, ω son constantes). Halle el valor medio de N_z, distinguiendo entre los casos $\Omega = 2\omega$ y $\Omega \neq 2\omega$.

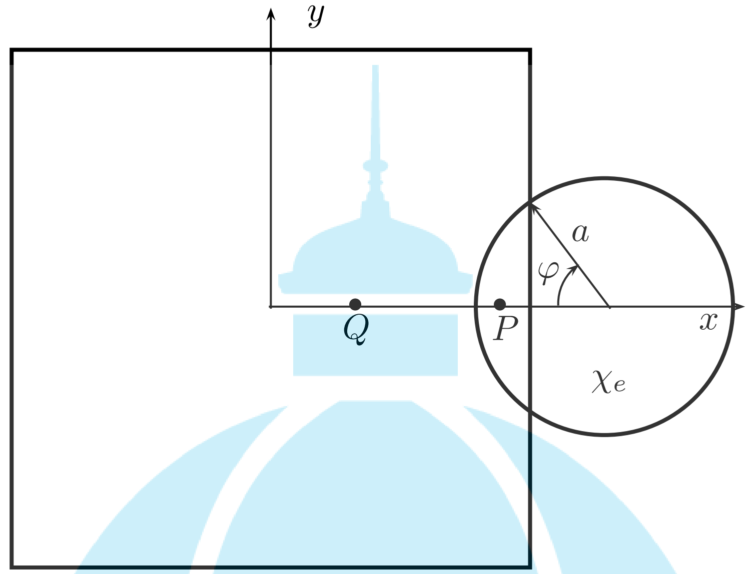
   Tenemos en cuenta que

$$< \cos\Omega t \cos(\Omega t + \delta) >= \frac{\cos\delta}{2}$$

   con lo que

$$\boxed{\text{Si } \Omega = 2\omega,\ N^2 I_0^2 \frac{B\cos\delta}{4\mathcal{R}_0}\text{; en otro caso, nulo.}}$$

Problema 2



Un condensador plano está formado por dos placas metálicas y cuadradas de lados paralelos a los ejes x, y de longitud $4a$, separadas una distancia $d \ll a$ (lo que permite suponer que la dirección del campo eléctrico es paralela al eje z). Los centros de las placas se encuentran en el eje z. Entre ellas se introduce una pastilla dieléctrica cilíndrica de altura d, radio a y susceptibilidad χ_e, con eje paralelo al z que puede desplazarse en el plano zx paralelamente al eje x. Sea φ el ángulo definido en la figura y que se utiliza para posicionar la pastilla. Se aplica una tensión V entre las dos placas, siendo el potencial de la inferior mayor que el de la superior. En el instante inicial se supone que $\varphi = \frac{\pi}{4}$ radianes. Obtenga:

1 el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, el desplazamiento $\boldsymbol{D}$ y la polarización $\boldsymbol{P}$ en un punto del interior del condensador ocupado por la pastilla dieléctrica (P, por ejemplo) y en un punto ocupado por aire (Q, por ejemplo).

En el dieléctrico: $\boxed{\left\{\begin{array}{lll} \boldsymbol{E} & = & \frac{V}{d}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{D} & = & \frac{\epsilon_0(1+\chi_e)V}{d}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{P} & = & \frac{\epsilon_0\chi_e V}{d}\boldsymbol{k} \end{array}\right.}$ En aire: $\boxed{\left\{\begin{array}{lll} \boldsymbol{E} & = & \frac{V}{d}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{D} & = & \frac{\epsilon_0 V}{d}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{P} & = & \boldsymbol{0} \end{array}\right.}$

2 la densidad superficial de carga de polarización en las bases de la pastilla que se encuentran en contacto con las placas, especificando su signo en las caras inferior y superior.

En la cara superior:

$\boxed{\sigma_s = \frac{\epsilon_0\chi_e V}{d}}$

y en la inferior

$\boxed{\sigma_i = -\frac{\epsilon_0\chi_e V}{d}}$

3 la carga en cada placa y la capacidad del condensador para un φ genérico

En la cara inferior $\boxed{Q = \frac{\epsilon_0\left(16+\chi_e\left[\varphi-\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{2}\right]\right)Va^2}{d}}$ y en la superior $-Q$.

con lo que

$\boxed{C(\varphi) = \frac{\epsilon_0\left(16+\chi_e\left[\varphi-\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{2}\right]\right)a^2}{d}}$

4 la fuerza con la que se atrae la pastilla dieléctrica hacia el interior del condensador en el instante inicial ($\varphi = \frac{\pi}{4}$ radianes).

Aplicamos la ecuación

$$F = \frac{V^2}{2}\frac{\partial C(\xi)}{\partial \xi}$$

siendo $\xi = 2a + a\cos\varphi$ la abscisa del centro de la pastilla y derivando a través de φ, se tiene

$$F_x = \frac{V^2}{2}\frac{\frac{\partial C(\varphi)}{\partial \varphi}}{\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\varphi}}$$

y la fuerza, atractiva, tiene de módulo $\boxed{F = \frac{\sqrt{2}}{2}V^2\frac{\epsilon_0\chi_e a}{d}}$