Apellidos y nombre:

Análisis Matemático. Convocatoria de enero. 19-01-2016. Prueba Global. Evaluación Continua

Instrucciones:

- No abandonar el examen durante los primeros 30 minutos.
- Tiempo para esta parte del examen: 2 horas y 30 minutos.
- No está permitido usar calculadora ni teléfono móvil.
- Las soluciones del examen se publicarán, esta tarde o mañana, en el Moodle de la asignatura, junto con la fecha de salida de las notas y el día de la revisión.

Test (20%)

En cada pregunta de test, una y sólo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta. Poner la letra elegida en la casilla correspondiente. **Calificación: acierto** $= +1$**, fallo** $= -0'5$ **y blanco** $= 0$**.**

La ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2\cos(y)$ en el punto $(1, 0)$ es:

(a) $z = 2x - 1$.

(b) $z = 2x - 3$.

(c) $z = 2x - y - 3$.

A

La integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{px}\,dx$ es convergente si y solo si:

(a) $p > 0$.

(b) $p < 0$.

(c) $|p| < 1$.

B

La integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-3x}\,dx$ es convergente y su valor es:

(a) $\dfrac{\Gamma(3)}{2}$.

(b) $\dfrac{\Gamma(3)}{9}$.

(c) $\dfrac{\Gamma(3)}{27}$.

C

La ecuación en diferencias $x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n$ tiene como polinomio característico

(a) $x^2 - 7x + 12$.

(b) $12x^2 - 7x + 1$.

(c) $x^2 + 7x - 12$.

A

La sucesión $a_n = \dfrac{n^2 \cos(n!)}{\sqrt{n^5 + n}}$

(a) es convergente pero no es monótona.

(b) es acotada pero no es convergente.

(c) es monótona pero no está acotada.

A

Sea a_n una sucesión que verifica que existe un término n_0 tal que $a_n > 10^6$, para todo $n \geq n_0$. Se puede asegurar que

(a) a_n no está acotada.

(b) a_n diverge a infinito.

(c) si a_n es convergente a l, entonces $l \geq 10^6$.

C

Sean $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ su sucesión de sumas parciales.

(a) Si a_n converge a 0, entonces la serie converge.

(b) Si S_n está acotada, entonces la serie converge.

(c) Si a_n está acotada, entonces la serie converge.

B

Dada la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{(-4)^n}$, se puede asegurar que

(a) es convergente, y su suma es $4/5$

(b) es convergente, y su suma es $-3/5$

(c) es convergente, y su suma es $-3/7$

B

El polinomio de Taylor de orden 6 de $f(x) = e^{x^2}$ centrado en $x = 0$ es

(a) $\sum\limits_{n=0}^{3} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

Teoría (10%)

(a) *(4 puntos)* Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim a_n = 0$.

(b) *(6 puntos)* Definir serie alternada. Enunciar con precisión el criterio de Leibniz sobre convergencia de series alternadas. Dar un ejemplo de serie convergente no absolutamente convergente.

SOLUCIÓN

(a) Por definición, una serie es convergente si la sucesión de sus sumas parciales es convergente.

Por tanto, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, debe ser $\lim S_n = l \in \mathbb{R}$.

Pero $a_n = S_n - S_{n-1}$ y como $\lim S_{n-1} = \lim S_n = l$, resulta $\lim a_n = l - l = 0$.

(b) Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es alternada si $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ para todo $n \geq 1$.

Criterio de Leibniz: Para que una serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente es suficiente que:

(i) $\lim |a_n| = 0$

(ii) $|a_n| > |a_{n+1}|$ para todo $n \geq 1$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ es alternada y convergente por el criterio de Leibniz, ya que la sucesión $1/n$ es decreciente y convergente a 0. Sin embargo la serie no es absolutamente convergente, ya que la serie de los valores absolutos es la serie armónica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Cuestión 1 (5%)

Hallar los puntos críticos de $f(x,y) = 7x^2 - x^3 + y^2 + 2xy$ y determinar si son máximos, mínimos o puntos de silla.

Solución

La función f es diferenciable en todo punto, por lo que sus únicos puntos críticos serán los que anulen las derivadas parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 14x - 3x^2 + 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 2x.$$

Por tanto, los puntos críticos de f son las soluciones de

$$\begin{aligned} 0 &= 14x - 3x^2 + 2y \\ 0 &= 2y + 2x. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación, se obtiene $y = -x$. Sustituyendo en la primera queda $-3x^2 + 12x = 0$, que tiene soluciones $x = 0$ y $x = 4$. Concluimos que los puntos críticos son $(0,0)$ y $(4,-4)$.

Las derivadas segundas de $f(x,y)$ son:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 14 - 6x, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2.$$

En el punto $(0,0)$ tenemos que $A = 14$, $C = B = 2$, y así $AC - B^2 = 24 > 0$, $A > 0$. Por tanto en $(0,0)$ hay un mínimo local.

En el punto $(4,-4)$ tenemos que $A = -10$, $C = B = 2$, y así $AC - B^2 = -24 < 0$. Por tanto en $(4,-4)$ hay un punto de silla.

Cuestión 2 (5%)

Hallar la solución particular de la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 13y = 0$ con $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Solución

Se trata de una EDO lineal homogénea de orden dos con coeficientes constantes. El polinomio característico es $z^2 - 6z + 13$, cuyas raíces son

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación es de la forma $y(t) = e^{3t}\left(\alpha \cos(2t) + \beta \operatorname{sen}(2t)\right)$.

Sustituimos ahora las condiciones iniciales: Como $y(0) = e^0(\alpha \cos 0 + \beta \operatorname{sen} 0) = \alpha = 0$, queda $y(t) = e^{3t}(\beta \operatorname{sen}(2t))$, cuya derivada es $y'(t) = e^{3t}\left(3\beta \operatorname{sen}(2t) + 2\beta \cos(2t)\right)$. Ahora $y'(0) =$

Cuestión 3 (5 %)

Calcular el límite de la sucesión $\sqrt[n]{3^n + 7^n}$.

SOLUCIÓN

Puesto que $0 \le 3^n \le 7^n$ para todo $n \ge 0$, la regla del Sandwich implica que

$$7 = \lim \sqrt[n]{7^n} \le \lim \sqrt[n]{3^n + 7^n} \le \lim \sqrt[n]{7^n + 7^n} = \lim \sqrt[n]{2 \cdot 7^n}.$$

Pero $\lim \sqrt[n]{2 \cdot 7^n} = \lim \sqrt[n]{2} \cdot \lim \sqrt[n]{7^n} = 1 \cdot 7 = 7$, de modo que concluimos que

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{3^n + 7^n} = 7.$$

Cuestión 4 (5 %)

Hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x+1)^n}{2^n}$$

SOLUCIÓN

Se trata de una serie de potencias centrada en $x_0 = -1$ y con coeficientes $a_n = \dfrac{n+1}{2^n}$. El radio de convergencia es

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{n+1}{2^n}}} = 2$$

Se deduce que la serie es absolutamente convergente (y por tanto convergente) para todo x del intervalo $(-3, 1)$.

Si $x > 1$ o $x < -3$ la serie es divergente.

Veamos ahora la convergencia en los extremos del intervalo, $x_0 \pm R$:

Para $x = 1$, la serie es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n + 1$, que es divergente porque el término general no tiende a 0.

Para $x = -3$, la serie es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(-1)^n$, que también es divergente (por igual motivo).

En conclusión el intervalo de convergencia es $(-3, 1)$.

Problema 1 (15%)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ e^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, se considera $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) *(3 puntos)* Calcular $F(0)$, $F(1)$ y $F(2)$.

(b) *(3 puntos)* Estudiar la continuidad y derivabilidad de F, determinar $F'(x)$ donde exista y estudiar el crecimiento de F.

(c) *(4 puntos)* Hallar la expresión explícita de $F(x)$.

Solución

(a) Tenemos que

$$\begin{aligned}
F(0) &= \int_0^0 f(t)\,dt = 0 \\
F(1) &= \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \\
F(2) &= \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = \frac{1}{2} + \int_1^2 e^{1-t}\,dt \\
&= \frac{1}{2} + \left[-e^{1-t}\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \left(-e^{-1} + 1\right) = \frac{3}{2} - e^{-1}
\end{aligned}$$

(b) Puesto que la función f está acotada en cualquier intervalo acotado, y es continua excepto, a lo sumo, en $x = 1$, es una función integrable. Por tanto, el Teorena Fundamental del Cálculo afirma que que F es continua en todo su dominio.

Además,

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} e^{1-x} = e^0 = 1$$

por lo que f es continua en todo $\mathbb{R}$ y de nuevo por el TFC se puede afirmar F es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$, y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

Para estudiar el crecimiento de F, basta estudiar el signo de $f(x)$. Como la exponencial es siempre positiva, se tiene que $f(x) < 0$ si $x < 0$ y $f(x) > 0$ si $x > 0$. Por tanto, F es decreciente en $(-\infty, 0)$, y creciente en $(0, \infty)$.

(c) La expresión explícita de $F(x)$ es:

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Problema 2 (15 %)

Se consideran las sucesiones

$$a_n = \frac{(n+1)! + \sin(n)}{(n-1)!\ (\frac{1}{2})^n} \qquad\qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\log(k^k+1)}{k}$$

(a) *(3 puntos)* Obtener el orden de magnitud de a_n.

(b) *(3 puntos)* Justificar que S_n es divergente y obtener su orden de magnitud.

(c) *(2 puntos)* Comparar los órdenes de magnitud de las sucesiones a_n y S_n.

(d) *(2 puntos)* Justificar cuáles de las sucesiones a_n y S_n están en $\mathcal{O}(3^n)$ y cuáles en $\mathcal{O}(n^2)$.

Solución

(a) Puesto que $\sin n << n << (n+1)!$, tenemos que

$$a_n \sim \frac{(n+1)!}{(n-1)!\ (\frac{1}{2})^n} = (n+1)n \cdot 2^n \sim n^2 \cdot 2^n.$$

(b) El término general de la sucesión de sumas parciales S_n es

$$\frac{\log(n^n+1)}{n} \sim \frac{n\log(n)}{n} = \log(n).$$

Puesto que $\log(n)$ no converge a 0, deducimos que la sucesión de sumas parciales S_n es divergente (por la condición necesaria de convergencia de series).

Para obtener el orden de magnitud de S_n, que es el mismo que el de $\sum_{k=1}^{n} \log(k)$, utilizamos el criterio integral para series.

La función $f(x) = \log(x)$ es continua, positiva y creciente en $(1, \infty)$. Además

$$\int_1^n \log(x)\,dx = [x\log(x) - x]_1^n = n\log(n) - n \sim n\log(n) >> f(n).$$

Por lo tanto se concluye que

$$S_n \sim \sum_{k=1}^{n} \log(k) \sim \int_1^n \log(x)\,dx \sim n\log(n)$$

(c) Se tiene que $a_n \sim n^2 \cdot 2^n >> n^2 >> n\log(n)$, puesto que $2^n >> 1$ y $n >> \log(n)$. Por lo

Análisis Matemático. 19-01-2016. Modelo A

Tiempo para esta parte del examen: **50 minutos.**

Problema 3 (5%)

La entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ de cierto sistema están relacionadas por la ecuación diferencial: $y'' + 5y' + 6y = u(t)$. Se sabe que en el instante $t = 0$, es $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ y se pide:

(a) *(4 puntos)* Determinar la salida del sistema cuando la entrada es constante $u(t) = 1$.

Introducimos en Maxima la ecuación diferencial con la instrucción

```
ecuac1:'diff(y,t,2)+5·'diff(y,t)+6·y=1;
```

La solución general se obtiene con el comando **Resolver EDO**: $y = k1 \cdot e^{-2t} + k2 \cdot e^{-3t} + \dfrac{1}{6}$.

Obtenemos ahora la solución particular, con la instrucción

```
ic2(%,t=0, y=1, 'diff(y,t)=0);
```

$$y = \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6}$$

(b) *(4 puntos)* Determinar la salida del sistema cuando la entrada es periódica $u(t) = \sin(t)$.

Introducimos la ecuación diferencial

```
ecuac2:'diff(y,t,2)+5*'diff(y,t)+6*y=sin(t);
```

La solución general es $y = k1 \cdot e^{-2t} + k2 \cdot e^{-3t} + \dfrac{\sin(t) - \cos(t)}{10}$.

La solución particular en este caso es $y = \dfrac{16}{5}e^{-2t} - \dfrac{21}{5}e^{-3t} + \dfrac{\sin(t) - \cos(t)}{10}$.

(c) *(2 puntos)* Explicar la diferencia entre las salidas anteriores para valores grandes de t.
El límite cuando t tiende a infinito de la primera solución es $y = 1/6$, lo que significa que para valores grandes de t, la salida se comporta como la constante $1/6$. Sin embargo, para la segunda solución no existe límite cuando t tiende a infinito y la salida para valores grandes se comporta como una función periódica.

Problema 4 (5%)

Un algoritmo emplea una instrucción para resolver un problema cuando hay un solo dato de entrada. Si el número de datos es $n \geq 2$, utiliza $2n$ instrucciones para reducir el problema a dos problemas análogos con $n - 1$ datos y ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo. Sea x_n el número de intrucciones necesarias para resolver el problema con n datos, se pide:

(a) *(3 puntos)* Definir x_n recursivamente.

La sucesión recursiva es $x(n) = 2n + 2x(n-1)$, con $x(1) = 1$.

(b) *(5 puntos)* Obtener la expresión explícita de x_n resolviendo la ecuación en diferencias.
Para obtener la forma explícita basta resolver la ecuación en diferencias, ejecutando las instrucciones:

Problema 5 (10 %)

(a) *(3 puntos)* Usando el desarrollo en serie de potencias de $f(x) = e^{-x}$, demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, 3^n}$$

Usando el comando **Análisis, Calcular Serie** se obtiene la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^i}{i!},$$

cuyo campo de validez es toda la recta real.

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{\sqrt[3]{e}} = f(1/3)$, basta sustituir $x = 1/3$ en la serie anterior para obtener el resultado pedido.

(b) *(7 puntos)* Aproximar la suma de la serie anterior con un error menor que 10^{-7}.

Definimos el término general de la serie, $a(n) := \dfrac{(-1)^n}{n!\, 3^n}$.

La serie es convergente, por el criterio de Leibniz, ya que claramente $|a(n)|$ es decreciente y converge a 0. Para aproximar el valor de la suma con error menor que 10^{-7}, hay que sumar hasta un n tal que $|a(n+1)| < 10^{-7}$. Buscamos n, explorando con la siguiente instrucción de Maxima:

```
makelist([n, is(abs(a(n+1))<10^ (-7))], n,0,10);
```

Se obtiene $n = 6$. Por tanto basta ejecutar

```
sum(a(n),n,0,6), numer;
```

y se obtiene la aproximación $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}} \approx 0.71653131$

Análisis Matemático. 19-01-2015. Modelo B

Tiempo para esta parte del examen: **50 minutos.**

Problema 3 (5%)

La entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ de cierto sistema están relacionadas por la ecuación diferencial: $y'' + 4y' + 4y = u(t)$. Se sabe que en el instante $t = 0$, es $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ y se pide:

(a) *(4 puntos)* Determinar la salida del sistema cuando la entrada es constante $u(t) = 4$.

Introducimos en Maxima la ecuación diferencial con la instrucción

```
ecuac1:'diff(y,t,2)+4·'diff(y,t)+4·y=4;
```

La solución general se obtiene con el comando **Resolver EDO**: $y = (k1 + k2 \cdot t)e^{-2t} + 1$.

Obtenemos ahora la solución particular, con la instrucción

```
ic2(%,t=0, y=0, 'diff(y,t)=0);
```

$$y = (-2t + 1)e^{-2t} + 1$$

(b) *(4 puntos)* Determinar la salida del sistema cuando la entrada es $u(t) = t$.

Introducimos la ecuación diferencial

```
ecuac1:'diff(y,t,2)+4·'diff(y,t)+4·y=t;
```

La solución general es $y = (k1 + k2 \cdot t)e^{-2t} + \dfrac{t-1}{4}$.

La solución particular en este caso es $y = \left(\dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{4}\right) e^{-2t} + \dfrac{t-1}{4}$.

(c) *(2 puntos)* Explicar la diferencia entre las salidas anteriores para valores grandes de t.
El límite cuando t tiende a infinito de la primera solución es $y = 1$, lo que significa que para valores grandes de t, la salida se comporta como la constante 1. Sin embargo, para la segunda solución el límite cuando t tiende a infinito es infinito.

Problema 4 (5%)

Un algoritmo emplea una instrucción para resolver un problema cuando hay un solo dato de entrada. Si el número de datos es $n \geq 2$, utiliza n^2 instrucciones para reducir el problema a uno análogo con $n-1$ datos y ejecuta sobre él el mismo algoritmo. Sea x_n el número de intrucciones necesarias para resolver el problema con n datos, se pide:

(a) *(3 puntos)* Definir x_n recursivamente.

La sucesión recursiva es $x(n) = n^2 + x(n-1)$, con $x(1) = 1$.

(b) *(5 puntos)* Obtener la expresión explícita de x_n resolviendo la ecuación en diferencias.

Para obtener la forma explícita basta resolver la ecuación en diferencias, ejecutando las instrucciones:

Problema 5 (10 %)

(a) *(3 puntos)* Usando el desarrollo en serie de potencias de $f(x) = e^x$, demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, 2^n}$$

Usando el comando **Análisis, Calcular Serie** se obtiene la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$$

cuyo campo de validez es toda la recta real.

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{\sqrt{e}} = f(-1/2)$, basta sustituir $x = -1/2$ en la serie anterior para obtener el resultado pedido.

(b) *(7 puntos)* Aproximar la suma de la serie anterior con un error menor que 10^{-8}.

Definimos el término general de la serie, $a(n) := \dfrac{(-1)^n}{n!\, 2^n}$.

La serie es convergente, por el criterio de Leibniz, ya que claramente $|a(n)|$ es decreciente y converge a 0. Para aproximar el valor de la suma con error menor que 10^{-8}, hay que sumar hasta un n tal que $|a(n+1)| < 10^{-8}$. Buscamos n, explorando con la siguiente instrucción de Maxima:

```
makelist([n, is(abs(a(n+1))<10^ (-8))], n,0,10);
```

Se obtiene $n = 9$. Por tanto basta ejecutar

```
sum(a(n),n,0,9), numer;
```

y se obtiene la aproximación $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.606530659$