

**Nombre y apellidos:****Número de matrícula:**

- todos los problemas breves valen lo mismo
- las respuestas tienen que estar justificadas (razonamiento matemático, gráfico, etc)
- la única respuesta que se corrige es la que aparece en el rectángulo marcado
- no usar ningún otro papel de borrador y no escribir con lápiz
- 60 min, 6 problemas breves (4 puntos en total, 0.667 puntos cada problema)

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de los dos días hábiles siguientes a la finalización de la prueba.

Las preactas se publicarán no más tarde del día 27 de enero y la revisión de examen será el martes 2 de febrero a las 15:30 en la sala R3.

1. Un caucho comercial presenta la siguiente composición porcentual en masa: 5% de azufre; 60% residuos de butadieno y 35% residuos de estireno. Este elastómero se prepara a partir de un copolímero de butadieno-estireno que posteriormente es tratado con azufre para producir el entrecruzamiento de las cadenas (*vulcanización*). Calcular el porcentaje de entrecruzamiento.

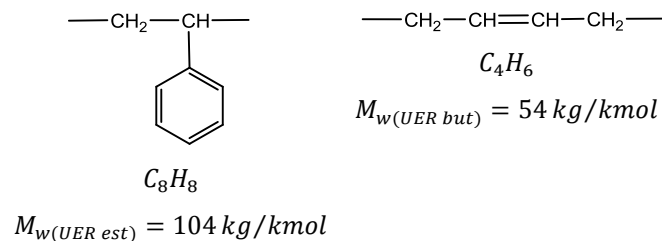
Suponer que solamente un átomo de azufre interviene en cada entrecruzamiento.

**Datos:**  $M_{wC} = 12 \text{ kg/kmol}$ ;  $M_{wH} = 1 \text{ kg/kmol}$ ;  $M_{wS} = 32 \text{ kg/kmol}$ .

entrecruzamiento (%) =

**Solución:**

Las estructuras y masas moleculares de las unidades estructurales repetitivas (UER) de estireno y butadieno son:



La presencia del doble enlace en el residuo de butadieno permite la reacción con azufre y el entrecruzamiento de las cadenas. De acuerdo con el enunciado en 100 kg de caucho hay 5 kg de azufre y 60 kg de residuos de butadieno; puesto que en cada entrecruzamiento interviene solamente un átomo de azufre, el número de entrecruzamientos se calcula a partir de la masa de azufre, mientras que el número de sitios posibles (de dobles enlaces) es igual al número de residuos de butadieno:

$$\text{entrecruzamiento (\%)} = \frac{\text{entrecruzamientos}}{\text{dobles enlaces residuos but.}} \times 100 = \frac{\frac{\text{masa azufre}}{M_{w(S)}}}{\frac{\text{masa residuos butadieno}}{M_{w(\text{UER but})}}} \times 100 = \frac{\frac{5 \text{ kg}}{32 \text{ kg/kmol}}}{\frac{60 \text{ kg}}{54 \text{ kg/kmol}}} \times 100$$

**entrecruzamiento (%) = 14.06%**

2. Un material compuesto está formado por láminas paralelas y alternadas de dos tipos de materiales **A** y **B**. Cada uno de los materiales, por separado, se considera isótropo y homogéneo. Se desea que el módulo elástico del material compuesto en condiciones de isodeformación sea 3 veces mayor que su módulo elástico en condiciones de isotensión. Determinar la relación entre los espesores de los materiales **A** y **B** ( $\frac{\delta_A}{\delta_B}$ ) en el material compuesto, sabiendo que  $V_A > 0.5$ .

**Datos:**  $E_A = 4.0 \times 10^7 Pa$ ;  $E_B = 6.0 \times 10^8 Pa$

$\frac{\delta_A}{\delta_B} =$
-------------------------------

**Solución:**

El material compuesto pertenece a la clase  $\infty/mm$ . Los módulos elásticos en condiciones de isodeformación e isotensión se determinan aplicando las reglas de mezcla:

- Isodeformación (direcciones 1 o 2): regla de Voigt

$$E_1 = V_A E_A + V_B E_B = 4.0 \times 10^7 V_A + 6.0 \times 10^8 (1 - V_A)$$

- Isotensión (dirección 3): regla de Reuss

$$\frac{1}{E_3} = \frac{V_A}{E_A} + \frac{V_B}{E_B} = \frac{V_A}{4.0 \times 10^7} + \frac{1 - V_A}{6.0 \times 10^8} \Rightarrow E_3 = \frac{2.4 \times 10^9}{56V_A + 4}$$

Según el enunciado  $E_1 = 3E_3$ , por lo que

$$E_1 = 4.0 \times 10^7 V_A + 6.0 \times 10^8 (1 - V_A) = \frac{7.2 \times 10^9}{56V_A + 4} = 3E_3$$

Resolviendo la ecuación se obtienen las soluciones:

$$V_{A1} = 0.811 \text{ y } V_{A2} = 0.189$$

De acuerdo con el enunciado, como  $V_A > 0.5$ , la solución válida es la primera  $V_{A1} = 0.811$

Y como la relación de fracciones volumétricas es idéntica a la relación de espesores pedidos

$$\frac{\delta_A}{\delta_B} = \frac{0.811}{0.189} = 4.291$$

3. Un material cristalino de la clase  $\bar{4}$  posee los siguientes valores para los módulos piezoeléctricos:

$d_{14} = 2.6 \times 10^{-10} \text{ C/N}$ ;  $d_{15} = -4.5 \times 10^{-10} \text{ C/N}$ ;  $d_{31} = -6.0 \times 10^{-10} \text{ C/N}$ ;  $d_{36} = 5.1 \times 10^{-10} \text{ C/N}$   
medidos en los ejes convencionales. Determinar el valor del módulo piezoeléctrico  $d_{321}$ .

$d_{321} =$	$\text{C/N}$
-------------	--------------

**Solución:**

Teniendo en cuenta la relación entre la notación tensorial y la notación de Voigt:

$$d_{321} = \frac{d_{36}}{2} = 2.55 \times 10^{-10} \text{ C/N}$$

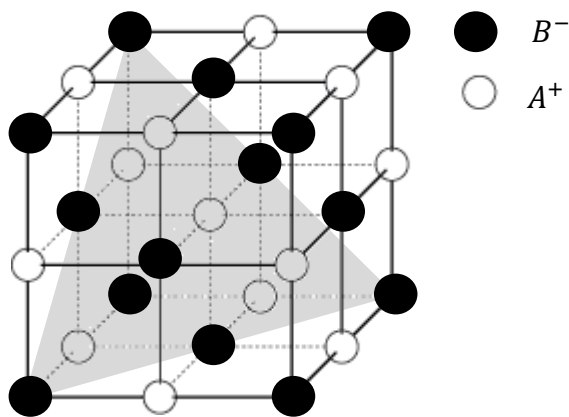
4. Un material cerámico AB cristaliza en una estructura tipo cloruro de sodio. Determinar la densidad iónica superficial ( $\rho_{\text{cationes}}^s$  y  $\rho_{\text{aniones}}^s$  por separado) en los planos de la forma {111}.

**Datos:**  $r_{A^+} = 1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$ ;  $r_{B^-} = 1.7 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

$\rho_{\text{cationes}}^s =$	$\text{cationes}/\text{m}^2$ ;	$\rho_{\text{aniones}}^s =$	$\text{aniones}/\text{m}^2$
------------------------------	--------------------------------	-----------------------------	-----------------------------

**Solución:**

En una estructura tipo NaCl la arista de la celda es  $a = 2(r_{A^+} + r_{B^-}) = 5.4 \times 10^{-10} \text{ m}$  y el área de los planos de la forma {111}, es  $A = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 = 2.525 \times 10^{-19} \text{ m}^2$  (dibujado en gris en la figura):



El plano (111) (dibujado en la figura) no contiene ningún catión (ecuación del plano  $x + y + z = 1$ ) y  $3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 2 \text{ aniones}$ ,

$$\rho_{\text{cationes}}^s = 0$$

$$\rho_{\text{aniones}}^s = \frac{2}{2.525 \times 10^{-19}} = 7.921 \times 10^{18} \text{ aniones}/\text{m}^2$$

5. Un material compuesto (**C**) está formado por láminas planas paralelas de un material conductor (**A**) separadas por capas de otro material (**B**) que se puede considerar un aislante perfecto. Los materiales **A** y **B**, por separado son homogéneos e isotrópicos. Determinar la conductividad eléctrica de este material compuesto ( $\sigma_{C(\underline{n})}$ ) en una dirección ( $\underline{n}$ ) que se encuentra en el plano definido por las direcciones convencionales 2 y 3, y que forma un ángulo  $\theta = 40^\circ$  con el eje 2.

**Datos:**  $\sigma_A = 1.5 \times 10^3 \text{ S/m}$      $V_A = 0.7$

$\sigma_{C(\underline{n})} = \quad \quad \quad \text{S/m}$
--

**Solución:**

La conductividad pedida se calcula como (ver propiedades de segundo orden en una dirección dada):

$$\sigma_{C\underline{n}} = n_i n_j \sigma_{Cij}$$

siendo los cosenos directores en la dirección pedida

$$n_1 = 0 \quad n_2 = \cos\theta \quad n_3 = \sin\theta$$

Es necesario conocer las componentes del tensor conductividad eléctrica para el material compuesto en las direcciones convencionales ( $\sigma_{Cij}$ ). Al tratarse de un material de la clase  $\infty/mm$ ,

- las conductividades en direcciones 1 y 2 (componentes A y B en paralelo, isogradiente o isotensión eléctrica), están dadas por la regla de mezcla de Voigt:

$$\sigma_{C11} = \sigma_{C22} = V_A \sigma_A \text{ (B es un aislante perfecto)}$$

$$\sigma_{C11} = V_A \sigma_A = 1050 \text{ S/m}$$

- la conductividad en dirección 3 (componentes en serie, isoflujo eléctrico, o isocorriente) es nula al considerar el material B como un aislante perfecto:  $\sigma_{C33} = 0$

Por lo tanto, la conductividad pedida (propiedades de segundo orden en una dirección dada) es:

$$\sigma_{C\underline{n}} = n_i n_j \sigma_{Cij} = n_2^2 \sigma_{C11} = \mathbf{616.16 \text{ S/m}}$$

6. Un vidrio (**V**) contiene los siguientes tres óxidos: SiO<sub>2</sub> (**A**), K<sub>2</sub>O (**B**) y PbO (**C**). Determinar la composición en fracciones másicas ( $X_A, X_B, X_C$ ) del vidrio (**V**) que cumple las siguientes especificaciones:

S1: densidad  $\rho_V = 3000 \text{ kg/m}^3$

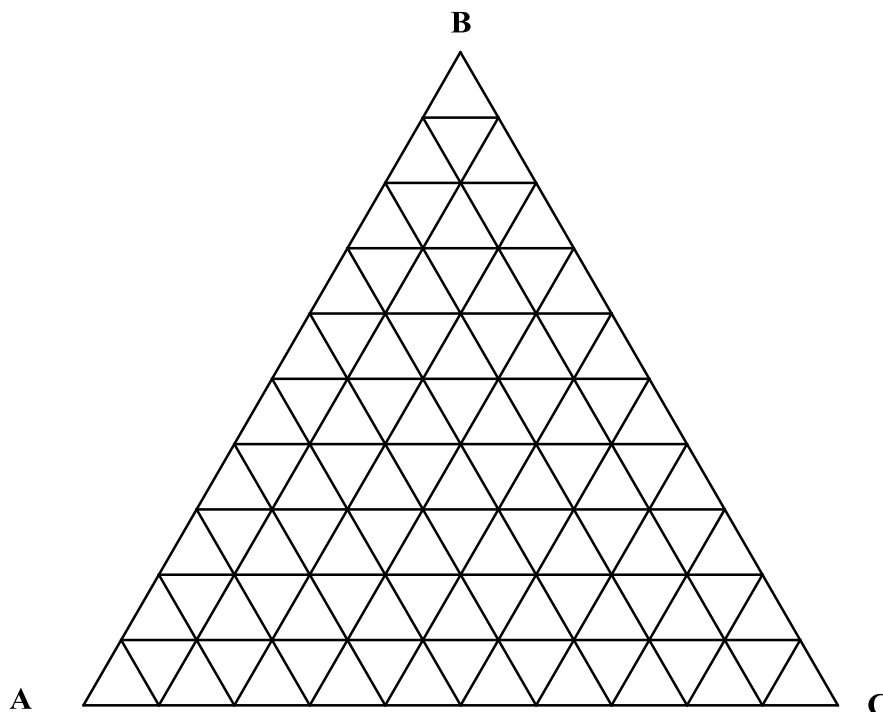
S2: su contenido en oxígeno es un 30% del total de su masa ( $X_O^V = 0.30$ ).

Resolver gráfica o analíticamente.

$X_{A(SiO_2)} =$	$X_{B(K_2O)} =$	$X_{C(PbO)} =$
------------------	-----------------	----------------

**Datos:**  $\rho_A = 2643 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_B = 2300 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_C = 9530 \text{ kg/m}^3$ .

Masas:  $Mw_{Si} = 28 \text{ kg/kmol}$ ;  $Mw_O = 16 \text{ kg/kmol}$ ;  $Mw_K = 39 \text{ kg/kmol}$ ;  $Mw_{Pb} = 207 \text{ kg/kmol}$ ;



**Solución:**

Se calculan las masas moleculares de los tres óxidos, así como su fracción másica en oxígeno:

- **A:** SiO<sub>2</sub>      $Mw_{A(SiO_2)} = 60 \text{ kg/kmol}$       $X_O^A = \frac{32}{60} = 0.533$
- **B:** K<sub>2</sub>O      $Mw_{B(K_2O)} = 94 \text{ kg/kmol}$       $X_O^B = \frac{16}{94} = 0.170$
- **C:** PbO      $Mw_{C(PbO)} = 223 \text{ kg/kmol}$       $X_O^C = \frac{16}{223} = 7.17 \times 10^{-2}$

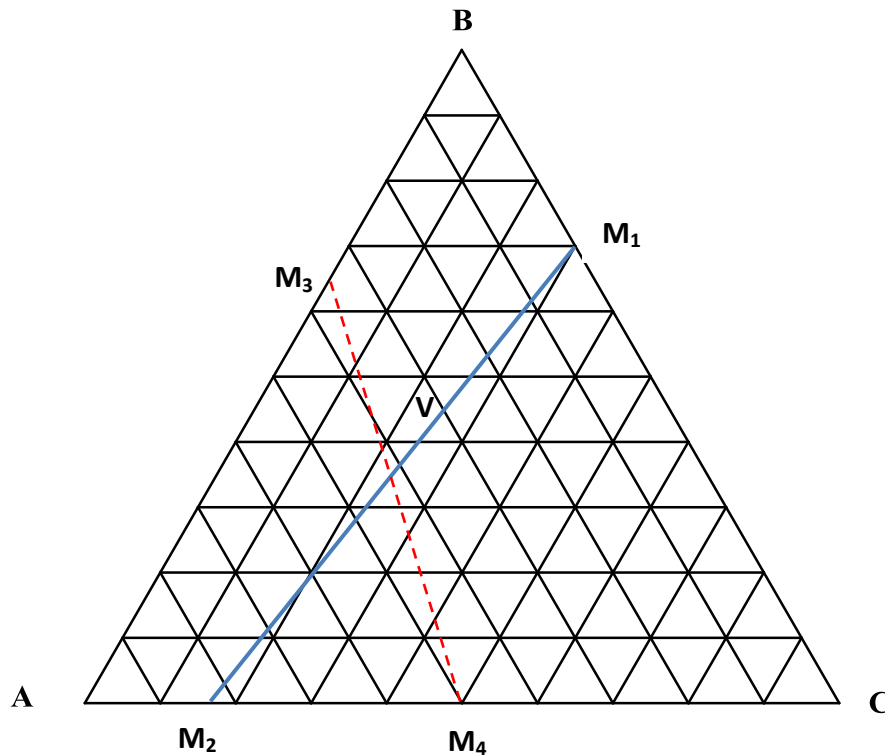
*Gráficamente:*

Se representan en el diagrama las dos rectas correspondientes a las dos especificaciones, siendo el punto de intersección la solución:

**S1: densidad  $\rho_V = 3000 \text{ kg/m}^3$**  (línea continua, azul): se determinan los extremos de la recta ( $M_1$  y  $M_2$ ) correspondientes a mezclas binarias BC y AC respectivamente:

$$\text{mezcla binaria } M_1 \text{ de B y C: } \frac{1}{\rho} = \frac{X_B^{M_1}}{\rho_B} + \frac{X_C^{M_1}}{\rho_C} = \frac{X_B^{M_1}}{2300} + \frac{(1 - X_B^{M_1})}{9530} = \frac{1}{3000} \Rightarrow X_B^{M_1} = 0.692$$

$$\text{mezcla binaria } M_2 \text{ de A y C: } \frac{1}{\rho} = \frac{X_A^{M_2}}{\rho_A} + \frac{X_C^{M_2}}{\rho_C} = \frac{X_A^{M_2}}{2643} + \frac{(1 - X_A^{M_2})}{9530} = \frac{1}{3000} \Rightarrow X_A^{M_2} = 0.835$$



**S2: contenido en oxígeno  $X_O^V = 0.30$**  (línea discontinua, roja): se determinan los extremos de la recta ( $M_3$  y  $M_4$ ) correspondientes a mezclas binarias AB y AC respectivamente:

$$\text{mezcla binaria } M_3 \text{ de A y B: } X_O^{M_3} = X_O^A \cdot X_A^{M_3} + X_O^B \cdot X_B^{M_3} = 0.533X_A^{M_3} + 0.170(1 - X_A^{M_3}) = 0.30 \Rightarrow X_A^{M_3} = 0.358$$

$$\text{mezcla binaria } M_4 \text{ de A y C: } X_O^{M_4} = X_O^A \cdot X_A^{M_4} + X_O^C \cdot X_C^{M_4} = 0.533X_A^{M_4} + 7.17 \times 10^{-2}(1 - X_A^{M_4}) = 0.30 \Rightarrow X_A^{M_4} = 0.495$$

La composición de **V** se lee directamente en el diagrama triangular.

*Analíticamente:*

Se plantean las siguientes ecuaciones:

$$X_A^V + X_B^V + X_C^V = 1 \text{ (ec. 1)}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{X_A^V}{\rho_A} + \frac{X_B^V}{\rho_B} + \frac{X_C^V}{\rho_C} \text{ (ec. 2)}$$

$$X_O^V = X_O^A \cdot X_A^V + X_O^B \cdot X_B^V + X_O^C \cdot X_C^V \text{ (ec.3)}$$

Y se obtiene la composición pedida:

$$X_{A(SiO_2)} = 0.422 \quad X_{B(K_2O)} = 0.343 \quad X_{C(PbO)} = 0.235$$

Nombre: \_\_\_\_\_

N° de matrícula \_\_\_\_\_

1. Una lámina de material polimérico Q se fabrica a partir de los dos monómeros A y B de la Fig.1. Las densidades  $\rho_A$  y  $\rho_B$  ( $\text{kg/m}^3$ ) y las masas moleculares de los monómeros,  $Mw_A$  y  $Mw_B$  ( $\text{kg/kmol}$ ) son conocidas, igual que las masas atómicas de todos los elementos. Los monómeros están disponibles en cantidades estequiométricas y la conversión en la polimerización es del 100%.

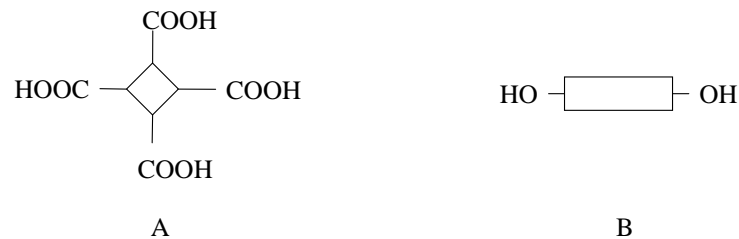


Figura 1: Monómeros A y B. Sólo se representan los grupos funcionales que intervienen en la polimerización. El resto de la estructura molecular de los monómeros, representado como un cuadrado o un rectángulo, no es importante para resolver el problema.

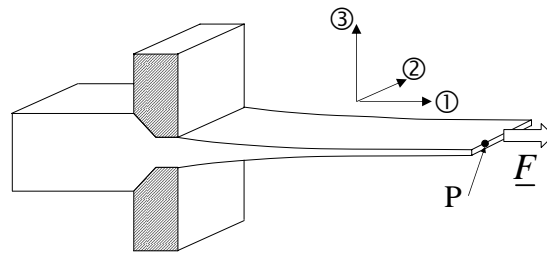


Figura 2: Producción de una lámina de Q por calandrado.

Una vez obtenido el polímero Q, se procesa por calandrado para formar una lámina (Fig.2). Durante el calandrado el campo de velocidad en toda la sección que contiene el punto P es elongacional plano. Expresado en los ejes de la Fig.2:

$$\underline{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} v_1 = \dot{\epsilon}x_1 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = -\dot{\epsilon}x_3 \end{cases}$$

con  $\dot{\epsilon}$  conocido. Durante el calandrado, Q se comporta como un fluido newtoniano de viscosidad  $\eta$  conocida. Las caras superior e inferior de la lámina, las perpendiculares al eje ③, son las únicas superficies libres.

1. representar la UER de Q, incluyendo explícitamente los átomos de C, H y O en los grupos funcionales resultantes,
  2. calcular cuántos kg de cada monómero son necesarios para sintetizar 1 kg de Q,
  3. calcular la densidad de Q, suponiendo que las densidades de los residuos monoméricos de A y B en Q son las mismas que las densidades de los monómeros A y B,
  4. calcular el módulo de la fuerza  $\underline{F}$  necesaria en la operación de calandrado para una lámina de anchura  $H$  y espesor  $\delta$  conocidos,
  5. determinar y justificar a qué clase pertenece el material de la lámina calandrada.
- (3 puntos, 45 minutos)

---

Sol.:



- como los monómeros A y B tienen cuatro y dos grupos funcionales reaccionantes respectivamente, la estequiometría de la polimerización es 2:4, o lo que es lo mismo, 1:2. La UER debe contener residuos monoméricos de A y B en esta proporción. Una de las más sencillas es:

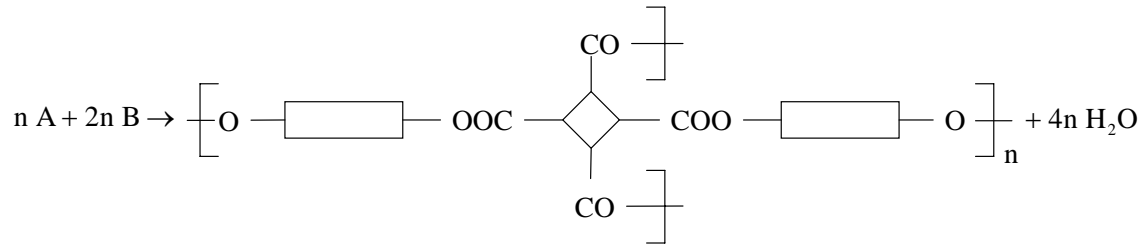


Figura 3: Esquema de la UER de Q. En la polimerización se desprenden cuatro moléculas de agua por cada UER.

Esta UER se obtiene a partir de una molécula de A con dos de B con formación de cuatro moléculas de agua (Fig.3).

- la masa molecular de la UER es  $Mw_{\text{UER}} = Mw_A + 2Mw_B - 4Mw_{\text{H}_2\text{O}}$  kg/kmol. En 1 kg de Q hay  $\frac{1}{Mw_{\text{UER}}}$  kmoles de Q. Por cada uno de estos ha sido necesario emplear uno de A y dos de B, con lo que las masas de A y B necesarias para 1 kg de Q son:

$$\frac{1}{Mw_{\text{UER}}} \times 1 \times Mw_A \text{ kg de A/kg de Q} \quad \text{y} \quad \frac{1}{Mw_{\text{UER}}} \times 2 \times Mw_B \text{ kg de B/kg de Q}$$

La suma de estas dos cantidades es mayor que 1 kg porque se pierde agua en la polimerización.

- la densidad de Q se obtiene a partir de su composición en fracciones másicas  $X_A, X_B$  y las densidades de los monómeros. Las fracciones másicas deben calcularse con las masas de los residuos monoméricos de A y de B, que son los que aparecen en la UER, y *no* con las masas moleculares de los monómeros. Cada residuo monomérico de A tiene cuatro  $-\text{OH}$  menos que el monómero de A (el ácido orgánico pierde  $-\text{OH}$  en la esterificación); cada residuo monomérico de B tiene dos hidrógenos menos que el monómero de B (el alcohol pierde  $-\text{H}$  en la esterificación):

$$X_A = \frac{Mw_A - 4Mw_{\text{OH}}}{Mw_{\text{UER}}} \quad X_B = 1 - X_A = \frac{2Mw_B - 4Mw_{\text{H}}}{Mw_{\text{UER}}}$$

Conocidas las fracciones másicas, la densidad es:

$$\rho_{\text{UER}} = \left( \frac{X_A}{\rho_A} + \frac{X_B}{\rho_B} \right)^{-1}$$

- para calcular la fuerza es necesario calcular primero la tensión mecánica en el punto P. La ecuación constitutiva del fluido newtoniano (relación entre tensión y velocidad de deformación) es:

$$\underline{\underline{\tau}} = -\eta \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \quad \text{donde} \quad \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \equiv [\underline{\nabla} \underline{v} + (\underline{\nabla} \underline{v})^T]$$

Para el campo de velocidad dado,

$$\llbracket \underline{\nabla} \underline{v} \rrbracket = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\epsilon} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \llbracket \underline{\underline{\tau}} \rrbracket = \begin{bmatrix} -2\dot{\epsilon}\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{\epsilon}\eta \end{bmatrix}$$

La tensión mecánica total está dada por la que proviene de la ecuación constitutiva más un término isótropo que, para un fluido incompresible, es importante en el caso de que haya superficies libres:

$$\underline{\underline{\tau}}^{tot} = \underline{\underline{\tau}} + p\underline{\underline{\delta}}$$

En esta aplicación las caras de la lámina perpendiculares al eje ③ son superficies libres y en ellas la tensión normal debe ser igual a la ambiente, tomada como referencia (= 0). Para hacer nula la componente ③③ de  $\underline{\underline{\tau}}$  es preciso añadir un término isótropo  $p\underline{\underline{\delta}}$  con  $p = -2\dot{\epsilon}\eta$ , con lo que resulta:

$$\llbracket \underline{\underline{\tau}}^{tot} \rrbracket = \llbracket \underline{\underline{\tau}} \rrbracket - 2\dot{\epsilon}\eta \llbracket \underline{\underline{\delta}} \rrbracket = \begin{bmatrix} -4\dot{\epsilon}\eta & 0 & 0 \\ 0 & -2\dot{\epsilon}\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La fuerza será igual a la componente ①① de la tensión, multiplicada por el área de la sección transversal al eje ①, que tiene  $H$  m de anchura (la anchura de la lámina) y espesor  $\delta$ . Su módulo es:

$$F = 4\dot{\epsilon}\eta H\delta$$

- durante el calandrado (Fig.4), las moléculas de Q, que inicialmente forman un ovillo esférico, no se deforman en dirección ② (porque la anchura de la lámina no cambia), sufren extensión en dirección ① (porque el material se estira en esta dirección) y acortamiento en dirección ③ (porque el material se contrae en esta dirección).

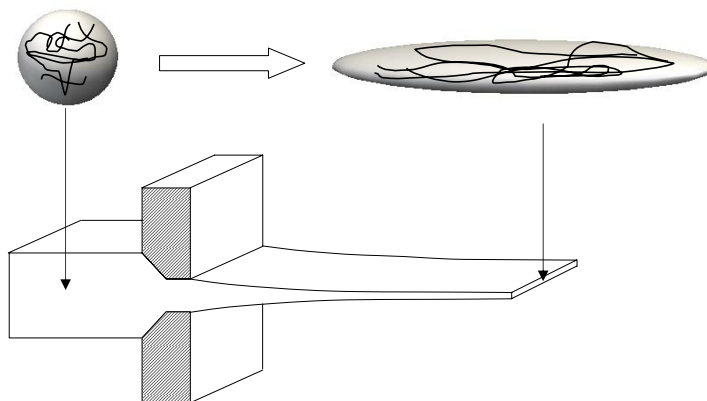


Figura 4: Durante el calandrado, las moléculas de Q se estiran de modo diferente en las tres direcciones de los ejes ①②③.

La estructura molecular que resulta para el material Q tiene tres planos de simetría, que son perpendiculares a los ejes representados en la Fig.2 y por tanto perpendiculares entre sí; además tiene tres ejes binarios perpendiculares a estos tres planos. Con estos elementos de simetría y con ayuda de las tablas de estereogramas se determina que pertenece a la clase ortorrómbica holoédrica  $mmm$ .

Nombre: \_\_\_\_\_

N° de matrícula \_\_\_\_\_

2. Un soporte está hecho de un compuesto C de dos capas: una capa A de acero con perforaciones de muy pequeño diámetro y una capa B homogénea e isotrópica de hormigón (Fig.5). De la capa A, ya homogeneizada, se conocen los siguientes módulos y relaciones de Poisson:  $(E_A)_1$ ,  $(E_A)_3$ ,  $(G_A)_4$ ,  $(\nu_A)_{12}$ ,  $(\nu_A)_{13}$ , referidos a sus ejes convencionales. De la capa B se conocen sus módulos  $E_B$  y  $G_B$ . Los espesores de las capas son  $\delta_A$  y  $\delta_B$ .

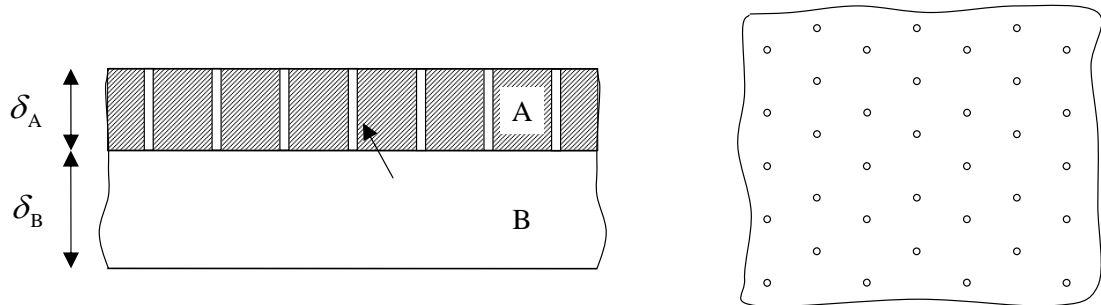


Figura 5: Sección del compuesto C (izq.); la flecha señala una de las perforaciones. A la derecha, vista superior de la lámina A. Las perforaciones aparecen como círculos de pequeño diámetro.

Una muestra de C de dimensiones  $L \times L$  se somete a un ensayo mecánico con fuerzas, todas de igual módulo, aplicadas como se indica en la Fig.6. Cada fuerza actúa y está uniformemente distribuida sobre toda el área lateral de la muestra de manera que el estado de tensión en toda la muestra de C es homogéneo.

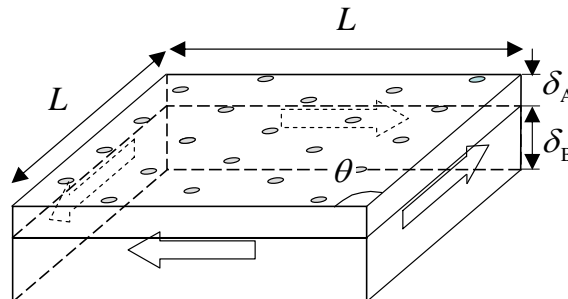


Figura 6: Muestra cuadrada de C sometida a ensayo mecánico.

Determinar:

1. la clase cristalográfica de C y dibujar sobre la Fig.6 sus ejes convencionales,
2. el módulo de Young  $(E_C)_1$ , referido a sus ejes convencionales,
3. el módulo de Young  $(E_C)_3$ , referido a sus ejes convencionales,
4. el módulo cortante  $(G_C)_4$ , referido a sus ejes convencionales,
5. el módulo cortante  $(G_C)_6$ , referido a sus ejes convencionales,
6. la relación de Poisson  $(\nu_C)_{12}$ , referida a sus ejes convencionales,
7. la relación de Poisson  $(\nu_C)_{13}$ , referida a sus ejes convencionales,
8. escribir como matriz la tensión mecánica en la muestra referida a sus ejes convencionales,
9. escribir como matriz el tensor de deformación en la muestra referido a sus ejes convencionales,
10. calcular la variación del espesor de la muestra y la variación del ángulo  $\theta$  señalado en la Fig.6 tras la deformación.

(3 puntos, 45 minutos. Nota: en las preguntas 2 a 7 no se puede usar la regla de Voigt-Reuss-Hill)

Sol.:

- la capa A de acero con perforaciones en disposición hexagonal pertenece a la clase centrosimétrica  $6/mmm$ . La presencia de la segunda capa B reduce la simetría del compuesto C, que no será centrosimétrico ni tendrá ejes binarios: C pertenece a la clase  $6mm$ . Los ejes convencionales de C se colocan como indica el estereograma correspondiente (Fig.7).

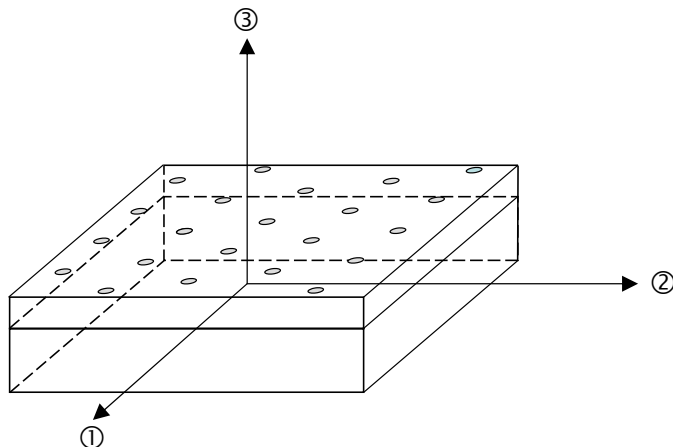


Figura 7: Ejes convencionales de C.

Los ejes convencionales de la capa A coinciden con los del material compuesto, y se conocen sus módulos y relaciones de Poisson ya homogeneizados, referidos a estos ejes,

- el módulo elástico  $(E_C)_1$  de C relaciona una tensión normal, debida por ejemplo a una fuerza de tracción en dirección ①, con la deformación longitudinal de C en la misma dirección. Las capas A y B se deforman igual (isodeformación) y el módulo  $(E_C)_1$  se calcula con la regla de mezcla lineal (de Voigt) usando el módulo  $(E_A)_1$  de la lámina perforada:

$$(E_C)_1 = \frac{\delta_A}{\delta_A + \delta_B} (E_A)_1 + \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B} E_B$$

- ante una fuerza de tracción en dirección ③ el compuesto C se deforma longitudinalmente en dirección ③: ahora las capas A y B soportan la misma tensión normal (isotensión) pero no se deforman igual. El módulo  $(E_C)_3$  del compuesto se calcula con la regla de mezcla armónica (Reuss) usando el módulo  $(E_A)_3$  de la lámina perforada:

$$(E_C)_3 = \left[ \frac{\delta_A}{\delta_A + \delta_B} \frac{1}{(E_A)_3} + \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B} \frac{1}{E_B} \right]^{-1}$$

- el módulo cortante  $(G_C)_4$  (o bien  $(G_C)_{23}$ ) relaciona la deformación angular que sufre el compuesto en el plano ②③ ante una tensión tangencial  $\tau_{23}$  o  $\tau_{32}$  ( $\tau_4$  en notación de Voigt). Las capas de A y B están sometidas a la misma fuerza por unidad de superficie (isotensión), pero se deforman de diferente manera (Fig.8).

El módulo cortante de la capa A en esta situación es  $(G_A)_4$ . Aplicando la regla de Reuss se obtiene  $(G_C)_4$ :

$$(G_C)_4 = \left[ \frac{\delta_A}{\delta_A + \delta_B} \frac{1}{(G_A)_4} + \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B} \frac{1}{G_B} \right]^{-1}$$

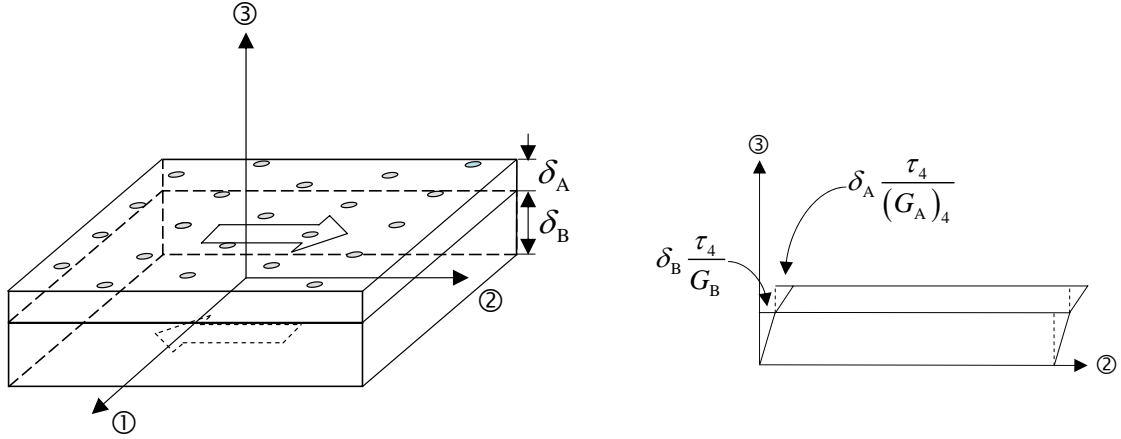


Figura 8: Deformación de A y B debida a  $\tau_{23}$ .

5. ante una tensión tangencial en el plano ①② (situación de la Fig.6) las capas se deforman angularmente y de la misma manera (isodeformación). El módulo cortante  $(G_C)_6$  se calcula con la regla de Voigt:

$$(G_C)_6 = \frac{\delta_A}{\delta_A + \delta_B} (G_A)_6 + \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B} G_B$$

y el módulo cortante  $(G_A)_6$  de la capa hexagonal A, con  $(s_A)_{66} = 2[(s_A)_{11} - (s_A)_{12}]$ , se calcula a partir de los datos del enunciado como:

$$(G_A)_6 = \frac{(E_A)_1}{2[1 + (\nu_A)_{12}]}$$

6. la relación de Poisson  $(\nu_C)_{12}$  relaciona la contracción de C en dirección ② ante un alargamiento (debido a una fuerza de tracción, por ejemplo) en dirección ①. No es posible calcularla mediante una regla de mezcla sencilla porque las capas de A y B no se contraen igualmente y el problema no es homogéneo.

Pero C es un material hexagonal y se cumple también la relación  $(s_C)_{66} = 2[(s_C)_{11} - (s_C)_{12}]$ , como en la capa A. Con esta relación y ya conocidos (homogeneizados) los módulos  $(E_C)_1$  y  $(G_C)_6$  se determina  $(\nu_C)_{12}$  como:

$$(\nu_C)_{12} = \frac{(E_C)_1}{2(G_C)_6} - 1$$

7. la relación de Poisson  $(\nu_C)_{13}$  relaciona la contracción de C en dirección ③ ante un alargamiento (debido a una fuerza de tracción, por ejemplo) en dirección ①. Ante una tracción en dir ① las capas A y B están en isodeformación (pregunta 2) y sufren la misma deformación longitudinal  $\epsilon_1$  en dirección ①. Por el contrario, cada capa se encoge de forma diferente en dirección ③, pero el acortamiento de C sí es la suma de las contracciones de A y B en dirección ③:

$$-(\nu_C)_{13}\epsilon_1 = -V_A(\nu_A)_{13}\epsilon_1 - V_B\nu_B\epsilon_1 \quad \Rightarrow \quad (\nu_C)_{13} = \frac{\delta_A}{\delta_A + \delta_B}(\nu_A)_{13} + \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B}\nu_B$$

donde  $\nu_B = \frac{E_B}{2G_B} - 1$ .

8. la tensión mecánica en la muestra de la Fig.6 se ha descrito en la pregunta 5; escribiendo

la tensión como matriz:

$$\llbracket \underline{\underline{\tau}} \rrbracket = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-F}{L(\delta_A + \delta_B)} & 0 \\ \frac{-F}{L(\delta_A + \delta_B)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. el tensor de deformación en los mismos ejes solo tiene componente  $\epsilon_{12}$ . Primero se multiplica  $\xi \vec{\tau}$  en notación de Voigt, de donde resulta como única componente distinta de cero:

$$\epsilon_6 = (s_C)_{66} \tau_6 = \frac{1}{(G_C)_6} \frac{-F}{L(\delta_A + \delta_B)} = 2\epsilon_{12}$$

y volviendo a notación tensorial:

$$\llbracket \underline{\underline{\epsilon}} \rrbracket = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-F}{2(G_C)_6 L(\delta_A + \delta_B)} & 0 \\ \frac{-F}{2(G_C)_6 L(\delta_A + \delta_B)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. el espesor de la muestra no varía después de la deformación y sigue siendo  $\delta_A + \delta_B$ . El ángulo  $\theta$ , que originalmente era  $\frac{\pi}{2}$ , aumenta en  $\frac{F}{(G_C)_6 L(\delta_A + \delta_B)}$  radianes.