ELAI-ETSIDI

INGENIERIA DE CONTROL. **CURSO 14/15**

primer control

Ejercicio 1: **3,5 puntos (25 min.)**

Dado un sistema cuya FDT es:

$$G_p = \frac{Kp}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

T_1=1 s, T_2=0,5 s, K_p=10

Se pide diseñar un regulador PID utilizando el método de asignación directa de polos. Los paramtros deseados de los polos dominantes son: coeficiente de amortiguamiento es 0,707, frecuencia natural no amortiguada es 10 y α es 7.

sol :-

$$1 + G_p G_c = 0 \Rightarrow 1 + \frac{k_p}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \cdot k\left(\frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{T_i s}\right) = 0$$

$$T_i s + (T_1 + T_2) T_i s^2 + T_1 T_2 T_i s^3 + 10k + 10k T_i s + 10k T_i T_d s^2 = 0$$

$$0{,}5 T_i s^3 + (1{,}5 T_i + 10 k T_i T_d) s^2 + (10 k T_i + T_i) s + 10k = 0 \quad (1)$$

polos dominante deseados: $(s + \alpha \omega_n)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) = 0$

$$s^3 + 14{,}14 s^2 + 100 s + 70 s^2 + 989{,}8 s + 7000 = 0 \quad (2)$$

igualando (1) y (2)

desde (1)

$$s^3 + \frac{(1{,}5 + 10 k T_d) s^2}{0{,}5} + \frac{(10k+1)}{0{,}5} s + \frac{10K}{0{,}5 T_i} = 0$$

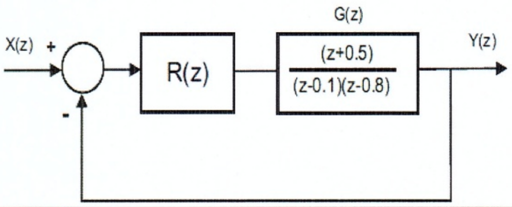
$$1089{,}8 = \frac{10k+1}{0{,}5} \Rightarrow \boxed{k = 54{,}39}$$

$$7000 = \frac{10k}{0{,}5 T_i} = \frac{10 * 54{,}39}{0{,}5 T_i} \Rightarrow \boxed{T_i = 0{,}154}$$

$$84{,}14 = \frac{1{,}5 + 10 * 54{,}39 * T_d}{0{,}5} \Rightarrow \boxed{T_d = 0{,}07459}$$

Ejercicio 2: **3,5 puntos (25 min)**

Diseñar el regulador discreto $R(z)$ más sencillo que cumpla las siguientes características dinámicas para el sistema mostrado en la figura:
$t_s \approx 5$ s $\pm 2\%$, $\varsigma = 0.5$
El tiempo de muestreo empleado es $T = 1$ segundo



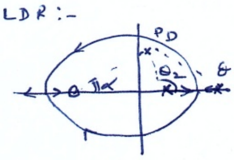
sol:-

$t_s = \frac{4}{\xi w_n} = 5 \Rightarrow \xi w_n = ,8$ rad/s. $\Rightarrow w_n = \frac{0,8}{0,5} = 1,6$ rad/s $\Rightarrow w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} = 1,39$ rad/s

$P_D \Rightarrow |z| = e^{-T\xi w_n} = 0,5 \Rightarrow \theta = T w_d = 1,39$ rad $\Rightarrow P_D = 0,5 \cos 1,39 \pm (0,5 \operatorname{sen} 1,39)j =$

$\boxed{P_D = 0,09 \mp 0,49\,j}$

LDR :-



$\Rightarrow$ pertence P_D al LDR o no? criterio del angulo

$\theta_1 = 180 - \tan^{-1}\frac{0,49}{0,8-0,09} = 145,39^\circ$

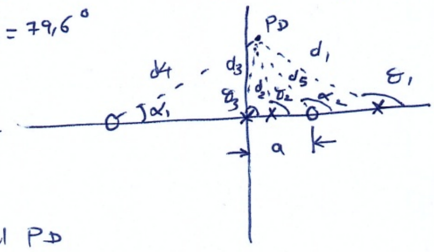
$\theta_2 = 180 - \tan^{-1}\frac{0,49}{0,1-0,09} = 91,17^\circ$

$\alpha = \tan^{-1}\frac{0,49}{0,5+0,09} = 39,71^\circ$

$\theta_1 + \theta_2 - \alpha = 180 \Rightarrow 145,39 + 91.17 - 39.71 = 196.85 \neq 180^\circ$

P_D no pertenence al LDR $\Rightarrow$ diseñamos $\boxed{PD}$:- polo en el origen y cero ajustable

el angulo del PD con el cero $\Rightarrow \theta_3 = \tan^{-1}\frac{0,49}{0,09} = 79,6^\circ$



$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \alpha_1 - \alpha_2 = 180^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 96.45^\circ$

la posición del cero es $:\Rightarrow 180 - \alpha_2 = 83,55$

$\tan 83,55 = \frac{0,49}{a - 0,09} \Rightarrow a = 0,145$

calcular distancias a polos y ceros desde el P_D

$d_1 = \sqrt{(0,8-0,09)^2 + 0,49^2} = 0,86$

$d_2 = \sqrt{(0,1-0,09)^2 + 0,49^2} = 0,49$

$d_3 = \sqrt{0,09^2 + 0,49^2} = 0,5$

$d_4 = \sqrt{(0,09+0,5)^2 + 0,49^2} = 0,77$

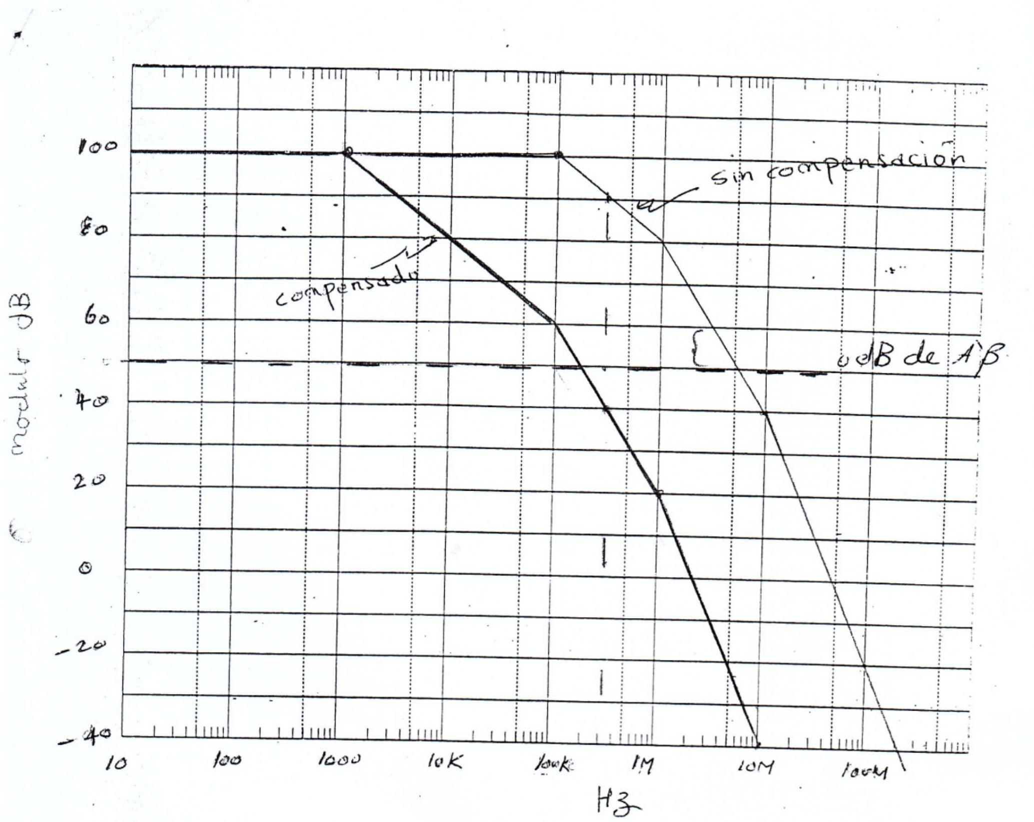
$d_5 = \sqrt{(a-0,09)^2 + 0,49^2} = 0,49$

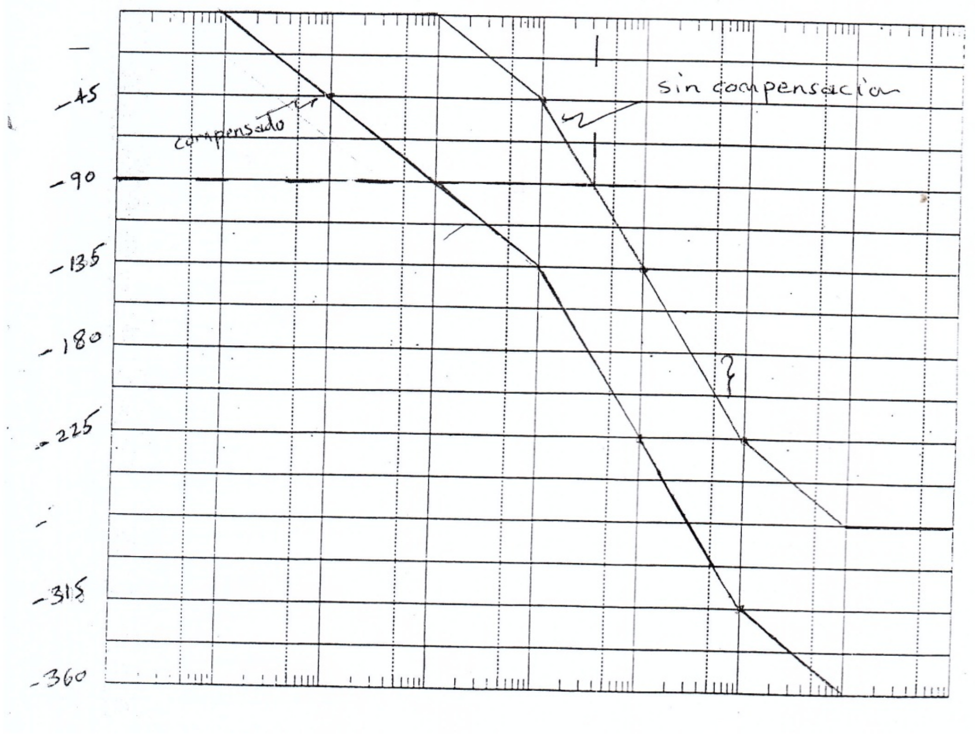
$\Rightarrow$ Aplicando criterio del modulo, el valor de K será:

$K = \frac{d_1 d_2 d_3}{d_4 d_5} = \frac{0,86 * 0,49 * 0,5}{0,77 * 0,49} = 0,56$

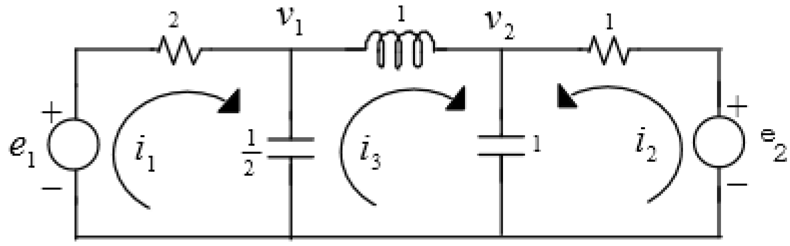
y finalmente el regulador PD será:-

$$\boxed{R(z) = 0,56\,\frac{(z - 0,145)}{z}}$$


sin compensación
compensado
dB de A'β
modulo dB
100
80
60
40
20
0
-20
-40
10
100
1000
10K
100k
1M
10M
100M
Hz


sin compensación
compensado
-45
-90
-135
-180
-225
-315
-360

SOLUCIÓN EJERCICIO DE ESTADO:



1. ***(0.75 puntos)*** *Proponer y justificar qué variables podrían considerarse variables de estado.*

   Para ser variables de estado deben cumplir entre otras, la propiedad de continuidad en el espacio de estado. Cuando hablamos de variables físicas, normalmente están asociadas a magnitudes que están relacionadas de alguna manera con términos energéticos. En el caso de montajes eléctricos, las tensiones en los condensadores y las corrientes que circulan por las bobinas suelen ser candidatas a variables de estado puesto que su variación brusca implicaría valores infinitos de los potenciales y de las corrientes.

   i_1: No es continua, obedece a los incrementos de la entrada e_1.

   i_2: Igual con e_2

   i_3: es continua porque de su derivada depende la tensión en extremos de la bobina.

   v_1: Igualmente es continua porque de su derivada depende la corriente del condensador de la primera malla.

   v_2: ídem que la anterior con el condensador de la tercera malla.

   Candidatas a variables de estado: v_1, v_2 e i_3, puesto que son l.i. entre sí.

2. ***(2,50 puntos)*** *Considerando el conjunto de variables: v_1, v_2, i_1 e i_3, elegir las que se consideren adecuadas (parte o la totalidad), y obténgase la representación del estado (ecuación de estado y ecuación de salida), tomando como salida la tensión en la bobina (considerar el signo de dicha tensión el correspondiente a i_3).*

   Por lo justificado en el apartado 1, y dado que el sistema tiene tres componentes asociados a almacenamiento de energía (dos condensadores y una bobina), siendo el orden del sistema igualmente tres por este motivo, de entre las variables propuestas nos quedamos con v_1, v_2 e i_3, ya que i_1 no es variable de estado.

   $x_1 = v_1 \qquad x_2 = v_2 \qquad x_3 = i_3$

   $e_1 = 2i_1 + v_1 \qquad e_2 = i_2 + v_2 \qquad i_1 - i_3 = \frac{1}{2}sv_1 \qquad i_2 + i_3 = sv_2$

$$\dot{x}_1 = 2(i_1 - i_3) \qquad i_1 = \frac{e_1 - x_1}{2} \qquad \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_3 + e_1$$

$$\dot{x}_2 = i_2 + i_3 \qquad i_2 = e_2 - x_2 \qquad \dot{x}_2 = -x_2 + x_3 + e_2$$

$$v_1 - v_2 = si_3 = \dot{i}_3 = \dot{x}_3 \qquad \dot{x}_3 = x_1 - x_2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

3. ***(1.25 puntos)** Discutir la controlabilidad (con cada una de las entradas y con ambas a la vez), y la observabilidad. En el caso de que el sistema no sea observable, proponer una modificación del modelo (cambio en la definición de las entradas o de las salidas), para que si lo sea. Justificar la opción propuesta.*

   Matriz de controlabilidad considerando la entrada e_1:

   $$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   $rang(Q_1) = 3$ => Controlable con la entrada e_1

   Matriz de controlabilidad considerando la entrada e_2:

   $$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   $rang(Q_2) = 3$ => Controlable con la entrada e_2

   Como es lógico, considerando las dos entradas simultáneamente debe salir controlable también:

   $$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   $rang(Q) = 3$ => Controlable con las dos entradas.

Matriz de observabilidad:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad rang(P) = 2 \text{ => No es observable con } y = x_1 - x_2$$

El problema de la no observabilidad viene provocado porque la salida es una diferencia de dos variables de estado (x_1 y x_2). El conocer dicha diferencia no es suficiente para poder observar los valores absolutos del estado a partir de la información de la salida. Una solución sería elegir como salida un conjunto de variables de estado: $y = x_1$, $y = x_2$ o ambas al mismo tiempo. Veamos:

Con $y = x_1$:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad rang(P_1) = 3 \text{ => Observable con } y = x_1$$

Con $y = x_2$:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad rang(P_2) = 3 \text{ => Observable con } y = x_2$$

Lógicamente con ambas a la vez también será observable:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad rang(P_3) = 3 \text{ => Observable con } \begin{matrix} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{matrix}$$

4. ***(2,50 puntos)*** *Suponiendo* $e_2 = 0$ *y considerando* $y = v_1$ *determinar el control por realimentación del estado que permita obtener un tiempo de establecimiento de* $\pi / 2$ *s (suponer la expresión para sistemas claramente subamortiguados como válida en este*

caso) y una sobreoscilación del 0,2%, considerando el efecto del polo en $s=-10$ *despreciable. Determinar la acción de control.*

Los polos del sistema en lazo abierto se obtienen directamente calculando los autovalores de A:

$$\begin{array}{l} s=-0.5\pm 1.6i \\ s=-1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad p(s)=s^3+2s^2+4s+3$$

Para obtener el polinomio característico del sistema realimentado nos dicen que un polo está en $s=-10$ y que los otros dos los fijemos con $M_p \le 0.2\%$ y $t_s \le \frac{\pi}{2}$:

$$\sigma=2 \qquad tg(\theta)=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} s=-2\pm i \\ s=-10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad p(s)=s^3+14s^2+45s+50$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -50 & -45 & -14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} k_1=47 \\ k_2=39 \\ k_3=12 \end{array}$$

5. ***(1.75 puntos)*** *Si las variables de estado no son accesibles proponer un método para poder realimentar el estado. Plantear la expresión del sistema auxiliar necesario y mostrar las relaciones entre los parámetros de dicho sistema y los del sistema principal. Considerando los sistemas referidos a su forma canónica observable obtener el parámetro H del sistema auxiliar considerando los polos de éste en* $s=-10$.

Cuando no se puede medir directamente las variables de estado, bien porque no sean accesibles o no correspondan a magnitudes físicas, la solución es recurrir a un estimador del estado. La expresión: $\dot{x}_e = Fx_e + Gu + Hy$ responde al modelo de un observador, en donde eligiendo:

$$\begin{array}{l} G=B \\ F=A-HC \end{array}$$

Obtenemos las relaciones entre los parámetros del observador y los del modelo del sistema de partida, con la condición de que la dinámica de $A-HC$ sea estable y más rápida que la del sistema de partida (polos del observador en el semiplano real negativo y alejados hacia la izquierda del eje imaginario una distancia suficiente de los polos del sistema). Fijando los polos del observador en $s=-10$:

$$p_o(s)=(s+10)(s+10)(s+10)=s^3+30s^2+300s+1000$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1000 \\ 1 & 0 & -300 \\ 0 & 1 & -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} h_1 &= 997 \\ h_2 &= 296 \\ h_3 &= 28 \end{aligned}$$

6. ***(1.25 puntos)** En qué consiste el método de diseño LQR, qué diferencias aporta principalmente respecto del de situación de polos (5 líneas máximo). Definir el índice empleado comentando el significado de sus términos (especialmente el significado práctico). ¿De qué manera afecta en la estimación del regulador óptimo la variación de los elementos del parámetro Q?*

El diseño del regulador óptimo, a diferencia del método de situación de polos en lazo cerrado, nos permite establecer unas premisas objetivo mucho más amplias y variadas, atendiendo no sólo a cuestiones como el error, o la rapidez de la respuesta, sino que también se pueden establecer criterios de energía mínima para garantizar transitorios más suaves y eficientes. Para ello, se debe definir un índice de coste en el cual se plasmen dichos objetivos a conseguir:

$$J = \int_0^\infty \left[x^t(t) Q x(t) + u^t(t) R u(t) \right] dt$$

Las matrices Q y R son simétricas, no definida negativa y definida positiva respectivamente. R define la influencia de la entrada en el índice de coste, siendo el caso muy habitual de resultar la identidad. En ese caso, tendríamos como segundo término la norma del vector de entradas, lo que nos permite minimizar la energía de las entradas.

La matriz Q puede seleccionarse de tal forma que el primer término del operador integral sea la norma del vector de salidas ($Q = CC^t$), lo que nos permitiría junto con R=I, establecer en el índice un equilibrio entre las energías de entrada y de salida. En cualquier caso, en función de los elementos de Q podemos afectar con un mayor o menor peso a cada una de las variables de estado del modelo, haciendo que unas ponderen en mayor medida que otras en la definición del índice de coste.

El gran aporte de este método es conseguir el regulador de índice mínimo, por tanto el óptimo para las premisas de partida. En el caso de diseño fijando la posición de los polos siempre hay que encontrar una condición de compromiso a partir de las premisas, llegando a un resultado que generalmente está lejos del óptimo.