Nombre:	N° de matrícula

Problema 1

Se prepara una lámina de material compuesto C piezoeléctrico a partir de una matriz amorfa isótropa (m) y partículas monocristlinas (f) de un material piezoeléctrico. Las partículas tienen forma de pirámide recta de base cuadrada (parte izquierda de la Fig.1) y están todas orientadas con todos los ejes cristalográficos en las mismas direcciones, pero sin orden posicional (parte derecha de la Fig.1).

La lámina tiene un espesor h y de ella se corta una pieza de la forma indicada en la Fig.2 izq., para usarla como manipulador piezoeléctrico por aplicación de un campo eléctrico de módulo E en la dirección que se indica. La parte inferior de la pieza está solidariamente unida a la base, que aparece en gris en la parte derecha de la Fig.2.

El compuesto C contiene una fracción volumétrica V_f de cristales y se conocen todas las componentes de su módulo piezoeléctrico $\underset{\sim}{d}_C$. Los precios de los componentes son conocidos, p_m, p_f (€/kg), igual que sus densidades ρ_m, ρ_f (kg/m^3).

Calcular:

1. el precio de C, p_C (€/kg),
2. la masa de 1 m^2 de la lámina de C (kg/m^2),
3. cuánto se desplaza el punto P del manipulador en la dirección A de la figura,
4. cuánto se desplaza el punto P del manipulador en la dirección B de la figura,

Dar los resultados *exclusivamente* en función de las componentes de $\underset{\sim}{d}_C$ en notación de Voigt y de los datos que aparecen en el texto del enunciado y en las figuras. En los dos últimos puntos, suponer pequeña deformación.

(45 minutos, 3 puntos)

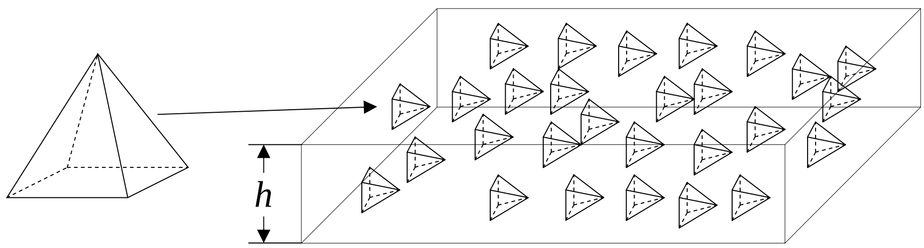

Figura 1: Compuesto de matriz amorfa y cristales piezoeléctricos.

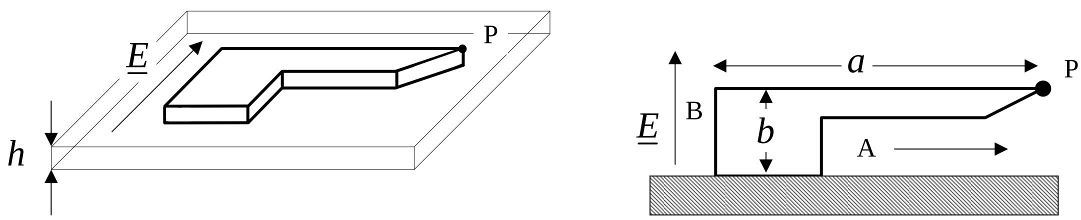

Figura 2: Manipulador piezoeléctrico cortado de la lámina de C.

Sol.:

1. el precio de las materias primas está dado en €/kg y el precio de C debe obtenerse igualmente en €/kg, mientras que la composición del enunciado es volumétrica. Lo primero es pasar las fracciones volumétricas a másicas:

$$X_f = \frac{V_f\rho_f}{V_f\rho_f + V_m\rho_m} \qquad X_m = \frac{V_m\rho_m}{V_f\rho_f + V_m\rho_m} = \frac{(1-V_f)\rho_m}{V_f\rho_f + (1-V_f)\rho_m}$$

con lo que el precio por unidad de masa de C es:

$$p_C = X_f p_f + X_m p_m = \frac{V_f\rho_f}{V_f\rho_f + (1-V_f)\rho_m} p_f + \frac{(1-V_f)\rho_m}{V_f\rho_f + (1-V_f)\rho_m} p_m$$

2. la densidad (kg/m^3) de C se obtiene de $\rho_C = V_f\rho_f + (1-V_f)\rho_m$. Como la lámina tiene un espesor h, 1 m^2 de lámina tiene un volumen de $1 \times h$ m^3 y una masa:

$$h\rho_C = h[V_f\rho_f + (1-V_f)\rho_m] \text{ kg/m}^2$$

3. los monocristales de f son tetragonales, de la clase $4mm$. Como los tres ejes convencionales de todos los cristales están orientados de igual modo, el compuesto también es de la misma clase $4mm$ y los ejes convencionales son los que se indican en la Fig.3.

   De acuerdo con la estructura del módulo piezoeléctrico para la clase $4mm$, se tiene para $\underset{\sim}{d}_C$ y para el campo eléctrico:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \underset{\sim}{d}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (d_C)_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (d_C)_{15} & 0 & 0 \\ (d_C)_{31} & (d_C)_{31} & (d_C)_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Al aplicar la ley constitutiva de la piezoelectricidad inversa, $\vec{\epsilon}^T = \vec{E}^T \underset{\sim}{d}_C$, se obtiene la deformación:

$$\vec{\epsilon}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E(d_C)_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   de donde $\epsilon_{23} = \frac{1}{2}\epsilon_4 = \frac{1}{2}E(d_C)_{15}$, que es una deformación angular en el plano ②③.

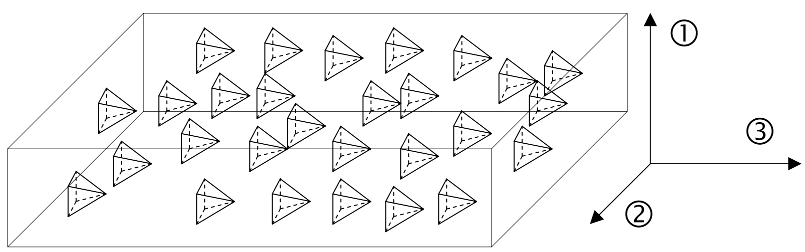

Figura 3: Ejes convencionales del compuesto C.

   Como la base del manipulador está fija y la única componente de la deformación diferente de cero es ϵ_{23}, la deformación angular en el plano ②③ produce el desplazamiento del punto P que se indica en la Fig.4. y que cuantitativamente es $2b\epsilon_{23} = b\epsilon_4 = bE(d_C)_{15}$ en dirección A, y nula en dirección B. Los ejes convencionales ② y ① pueden intercambiarse, pero el resultado que se obtiene es el mismo.

4. el desplazamiento en dirección B es nulo.

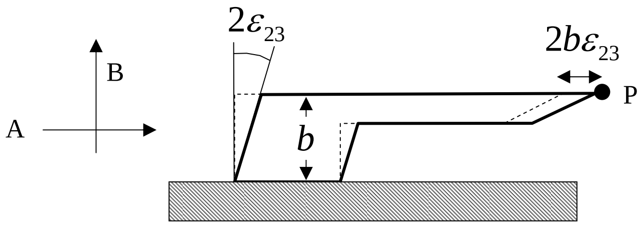

Figura 4: Desplazamiento del punto P causado por ϵ_{23} sobre el manipulador con la base fija.

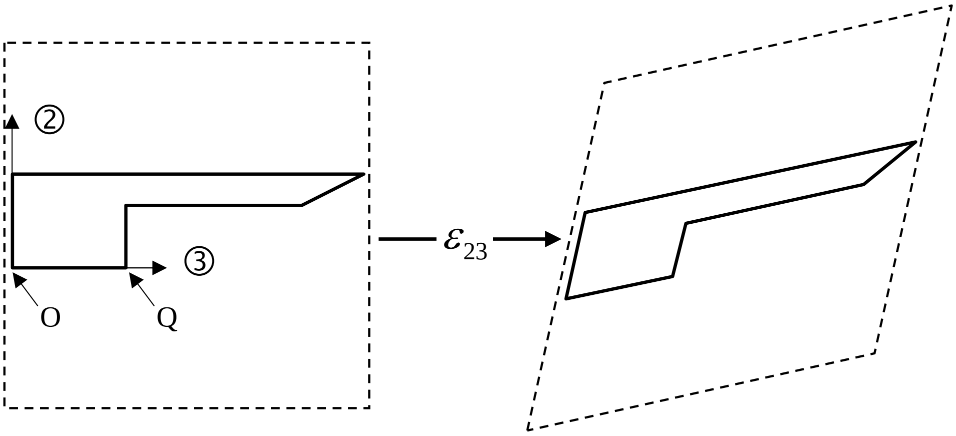

Figura 5: La deformación del manipulador causada por ϵ_{23} es de cortadura pura.

Los dos últimos apartados pueden hacerse también de otra manera menos directa: en la Sección 3.4.2 de los apuntes, se ve que un elemento fuera de la diagonal en el tensor deformación $\underline{\underline{\epsilon}}$, como el ϵ_{23} de este caso, produce (Ec.3.29):

$$u_2(x_2,x_3) = \epsilon_{23}x_3 - Kx_3 + C_2 \qquad u_3(x_2,x_3) = \epsilon_{23}x_2 + Kx_2 + C_3 \tag{1}$$

donde los los términos que contienen las constantes K, C_2, C_3 no producen deformación. Sin estos términos de traslación y giro rígidos, el elemento ϵ_{23} produce la deformación de la Fig.5.

La deformación del manipulador en las situaciones de las Figs.4 y 5 es idéntica. La única diferencia es que en la primera la base no gira, aunque puede variar en su longitud. Al imponer la condición de que un punto de la base esté fijo y de que la base no gire se obtienen los valores de K, C_2 y C_3 en (1). Con el origen O colocado como en la parte izquierda de la Fig.5, estas condiciones implican que las dos componentes del desplazamiento del punto O, de coordenadas (0,0), deben ser nulas; y el desplazamiento vertical, en dirección ②, de Q, de coordenadas $(0, x_3^Q)$, debe ser nulo:

$$\text{O está fijo} \;\Rightarrow\; \begin{cases} u_2(0,0) = 0 & \Rightarrow \quad C_2 = 0 \\ u_3(0,0) = 0 & \Rightarrow \quad C_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Q no se desplaza en ②} \quad \Rightarrow \quad u_2(0, x_3^Q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{23}x_3^Q - Kx_3^Q = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \epsilon_{23}$$

con lo que el campo de desplazamiento es:

$$u_2(x_2,x_3) = 0 \qquad u_3(x_2,x_3) = 2\epsilon_{23}x_2 \tag{2}$$

El desplazamiento pedido del punto P, $\underline{u}^P$, se obtiene de sustituir las coordenadas de P, (b,a), en (2):

$$u_2^P(b,a) = 0 \qquad u_3^P(b,a) = 2\epsilon_{23}b = b\epsilon_4 = bE(d_C)_{15}$$

que es el resultado correcto.

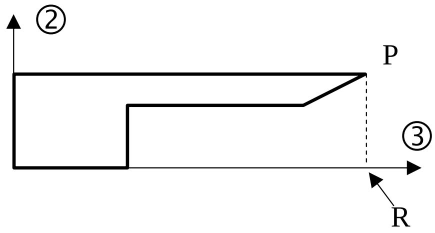

Figura 6: Otra manera es calcular el desplazamiento *relativo* de P respecto de R.

Una tercera forma, prácticamente idéntica, es usar la fórmula del desplazamiento $\underline{u} = \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{r}$, de la que las Ecs.(1) son dos componentes.

En notación vector-matriz el desplazamiento se obtiene de: $[\![\underline{u}]\!] = [\![\underline{\underline{\epsilon}}]\!][\![\underline{r}]\!]$. El desplazamiento de P es:

$$[\![\underline{u}^P]\!] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{23} \\ 0 & \epsilon_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a\epsilon_{23} \\ b\epsilon_{23} \end{bmatrix}$$

y el del punto R, situado donde se indica en la Fig.6:

$$[\![\underline{u}^R]\!] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{23} \\ 0 & \epsilon_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a\epsilon_{23} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el punto R debe mantenerse sobre la base, el desplazamiento de P es la diferencia

$$[\![\underline{u}^P - \underline{u}^R]\!] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b\epsilon_{23} \end{bmatrix}$$

que da nuevamente desplazamiento nulo en la dirección ② y desplazamiento $2\epsilon_{23}b = b\epsilon_4 = bE(d_C)_{15}$ en la dirección ③.

El punto esencial es que el desplazamiento afecta a *todos* los puntos del objeto, como se ve en la Fig.5. Lo que no es correcto es calcular el desplazamiento de un punto como P solo como $\underline{u}^P = \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{r}^P$, sin tener en cuenta que el resto de los puntos, p.ej. los de la base, también se desplazan.

De los tres modos de hacerlo, el primero es con mucho el más sencillo y directo. Es además idéntico al ejemplo de las págs. 111-112 de los apuntes, que para eso se ha incluido en la Sección dedicada a la deformación.