

UNIDAD
DIDÁCTICA

2

RELACIONES, APLICACIONES Y FUNCIONES (RAF)

OBJETIVOS DE LA UNIDAD

1. Introducción
2. Relaciones
 - 2.1. Definición
 - 2.2. Tipos de relaciones
 - 2.2.1. Relaciones unarias o monarias
 - 2.2.2. Binarias
 - 2.2.3. N-arias
 - 2.3. Dominio, recorrido y campo de una relación
 - 2.4. Operaciones entre relaciones: restricción; conversa o inversa; producto relativo
 - 2.4.1. Representación de relaciones
 - 2.5. Propiedades de las relaciones
 - 2.6. Composición de relaciones

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

- 3.3. Grafo de una aplicación
- 3.4. Tipos de aplicaciones
- 3.5. Composición de aplicaciones

4. Funciones

- 4.1. Generalidades
- 4.2. Descripción de conjuntos
- 4.3. Ejemplo del uso de funciones: el calendario universal
- 4.4. Funciones de dispersión: funciones «Hash»

5. Morfismos

CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

EJERCICIOS VOLUNTARIOS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



OBJETIVOS DE LA UNIDAD

Familiarizar al estudiante con conceptos fundamentales, relevantes y ubicuos, no solo para las matemáticas, sino también para la ciencia en general e incluso para la vida cotidiana. Estos conceptos son los siguientes:

- Relaciones y sus tipos: equivalencia y orden.
- Aplicaciones: sus tipos y operaciones.
- Funciones y morfismos (homomorfismos, isomorfismos, automorfismos y endomorfismos).
- Sistemas y estructuras algebraicas: operaciones internas y externas.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

1. INTRODUCCIÓN

Durante la Segunda Guerra Mundial, en el momento álgido del poderío nazi, Hitler decidió invadir Inglaterra. Como paso previo, desencadenó masivos, violentos y continuados bombardeos aéreos en lo que se conoció como la batalla de Inglaterra. Frente a los más que superiores medios aéreos nazis, tanto en bombarderos como en cazas, los británicos solo pudieron oponer unas menguadas fuerzas aéreas, básicamente cazas Hurricane, en lo que era su Royal Air Force (RAF). Con todo salieron tan bien libradas de los combates que el desembarco y la consiguiente invasión del Reino Unido jamás se produjo. Ante el valor, la decisión, el coraje, la habilidad, etc., de la menguada RAF, Churchill pronunció una de las frases que hicieron historia: «Nunca tantos deben tanto a tan pocos».

Jugando con las iniciales de los conceptos que se van a abordar en esta Unidad didáctica, «relaciones», «aplicaciones» y «funciones», que también dan el acrónimo RAF, se puede parafrasear la famosa frase de Churchill diciendo que, en matemáticas, «nunca tantas realizaciones deben tanto a tan pocos conceptos». En efecto, los conceptos aquí abordados son tan fundamentales, prácticamente para todas las matemáticas, más aún, para toda la ciencia, incluso más, para infinidad de cosas de la vida cotidiana, que sin ellos la matemática, de existir, sería una caricatura de lo que es. La ciencia devendría prácticamente imposible. Y la vida sería, además de muy distinta, seguramente mucho peor. Pero es que, a mayores, solo son tres, o mejor dicho, uno: las «relaciones», pues las «aplicaciones» son un tipo especial de relaciones y las «funciones» una clase particular de las aplicaciones, de modo que $R \supset A \supset F$.

Unas palabras de advertencia. En los diferentes textos aparecen distintos enfoques, énfasis y terminología para tratar estas cuestiones, casi tantos como autores, incluso más, pues algún autor, al repetir o hacer nuevas ediciones de sus textos, cambia alguno a todos los elementos anteriores. Aquí se sigue un enfoque ecléctico y globalizador, usando, eso sí, una visión única, completando, en cada caso, lo que decía un autor con lo que decían otros, naturalmente cuando se trata de temas básicos. Resumiendo lo resumido, y...

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



2. RELACIONES

2.1. DEFINICIÓN

Una **relación** no es más que un subconjunto de un referencial o del producto cartesiano de dos o más conjuntos diferentes o idénticos.

2.2. TIPOS DE RELACIONES

2.2.1. Relaciones unarias o monarias

En un conjunto referencial U , cuyos elementos son susceptibles de verificar una propiedad p , el subconjunto R , o $R(p)$, constituido por los elementos que verifican p , define una **relación unaria**:

$$R \subset U$$

Entonces, se dice que los elementos de R verifican la relación o, mejor aún, están en la relación. Por ejemplo, la «criba de Eratóstenes» permite establecer, en una lista limitada de números pertenecientes a \mathbb{N} , los números de dicha lista que son primos. Pues bien, el subconjunto de los números primos obtenidos de esta forma no es otra cosa que una relación unaria.

2.2.2. Binarias

Si ahora en vez de un conjunto se tienen dos conjuntos, verbigracia A y B , se denomina **relación binaria** a un subconjunto del producto cartesiano de $A \times B$:

$$R \subset A \times B$$

El conjunto de pares ordenados que están en la relación constituye la lista de elemen-

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

- A conjuntos idénticos; verbigracia, $A \times A$.
- A conjuntos infinitos; por ejemplo, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- A más de dos conjuntos, verbigracia, $A \times B \times C$. Entonces, en vez de pares ordenados se tienen ternas ordenadas.

Más aún, pues este concepto puede generalizarse a n conjuntos; por ejemplo, A, B, C, \dots, N , teniéndose entonces una n -erna. En este caso, la relación recibe el nombre de « n -aria».

En resumen, una **relación n -aria** es un subconjunto de n -ernas ordenadas pertenecientes al producto cartesiano de n conjuntos iguales o distintos que están en la relación.

Las relaciones son útiles en informática por muchas razones; sin ir más lejos, todas las «bases de datos relacionales» utilizan relaciones n -arias para el almacenamiento y acceso de datos. Sin embargo, en esta Unidad, y por ser las más generales, solo se van a considerar las relaciones binarias. Naturalmente, todo lo que se diga de ellas es, *mutatis mutandis*, aplicable a relaciones de «aridad» superior.

En la tabla 1, se muestran sucintamente los tipos de relaciones con sus ejemplos asociados más habituales en la ciencia.

Tabla 1. Relaciones más habituales en ciencia

Tipo de relación	Descripción	Ejemplos
Taxonómica	Clasifica un concepto general en un número más específico de conceptos u objetos.	A es B . A puede clasificarse como un B , un C o un D .
Estructural	Describe cómo un concepto o un sistema de conceptos puede ser descompuesto en partes o subsistemas.	A está cerca de B . A está a la izquierda de B .
Topológica	Describe la distribución espacial de conceptos físicos y las interconexiones entre estos conceptos.	A está a la derecha de B . A está encima de B . A está debajo de B .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Tipo de relación	Descripción	Ejemplos
...
Causal	Describe cómo ciertos estados o acciones inducen otros estados o acciones.	<i>A causa B.</i> <i>A es causado por B.</i>
Funcional	Describe las condiciones por las cuales pueden ocurrir acciones y las reacciones y consecuencias que pueden resultar de las acciones.	<i>A permite B.</i> <i>A necesita B.</i> <i>A dispara B.</i>
Cronológica	Describe la secuencia temporal en la que ocurren los eventos.	<i>A sucede antes que B.</i> <i>A ocurre después que B.</i> <i>A y B suceden simultáneamente.</i> <i>A ocurre durante B.</i> <i>A comienza antes de que B finalice.</i>
Similitud	Establece la «igualdad» o analogía entre conceptos y en qué grado.	La válvula <i>A</i> está abierta=admite gasolina.
Condicional	Define las condiciones en las que tienen lugar ciertas cosas.	Cuando masas pequeñas se mueven a poca velocidad y mucha aceleración usar hipótesis cuántica.
Finalidad	Establece el porqué y para qué de los conceptos.	Los códigos los crearon los humanos para transmitir sus ideas.

2.3. DOMINIO, RECORRIDO Y CAMPO DE UNA RELACIÓN

En las relaciones, las siguientes definiciones son importantes:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

- El **campo** de una relación R es el conjunto de todos los primeros y segundos miembros de los pares de R ; o sea, es la unión del dominio y el contra-domino o recorrido:

$$\langle\langle\text{Cam}\rangle\rangle R \triangleq (\langle\langle\text{Dom}\rangle\rangle R \cup \langle\langle\text{Rec}\rangle\rangle R)$$

Así, si $\langle\langle\text{Dom}\rangle\rangle R = \{1, 3\}$, $\langle\langle\text{Rec}\rangle\rangle R = \{a, b\}$, $\langle\langle\text{Cam}\rangle\rangle R = \{1, 3, a, b\}$. Si, verbigracia, $\langle\langle\text{Dom}\rangle\rangle R = \{x|x \text{ es un varón y } x \text{ es padre de alguna mujer}\}$, $\langle\langle\text{Rec}\rangle\rangle R = \{x|x \text{ es una mujer y algún varón es padre de } x\}$, $\langle\langle\text{Cam}\rangle\rangle R = \{x|x \text{ es un varón padre de alguna mujer, o } x \text{ es una mujer que tiene por padre algún varón}\}$.

El símbolo \triangleq significa igual por definición.

2.4. OPERACIONES ENTRE RELACIONES: RESTRICCIÓN; CONVERSA O INVERSA; PRODUCTO RELATIVO

Las relaciones, como acaba de verse, son cierto tipo de conjuntos, concretamente conjuntos de pares, ternas, en general, «n-ernas», ordenadas. En tanto que conjuntos, obviamente a ellas se aplican las siguientes operaciones generales entre conjuntos, ya vistas en la Unidad didáctica 1: unión, intersección, complementación, etc. Pero además, en tanto que conjuntos de ernas, se pueden definir para ellas ciertas operaciones especiales; las más comunes y útiles son las siguientes, aunque para simplificar solo se van a considerar relaciones binarias:

- **Restricción.** Se denomina restricción de una relación R respecto a un conjunto cualquiera C , que se denota mediante R/C , a una nueva relación formada por los pares de R , cuyo primer miembro pertenece a C ; es decir, $R/C \triangleq \{\langle x, y \rangle | \langle x, y \rangle \in R \wedge x \in C\}$.
- **Imagen.** Se denomina imagen de una relación R bajo un conjunto C , y se denota por $R[C]$ al conjunto de los segundos miembros de los pares de R cuyo primer miembro pertenece a C ; o sea, el «recorrido» de R/C : $R[C] \triangleq \{y | \exists x \langle x, y \rangle \in R \wedge x \in C\} = \langle\langle\text{Rec}\rangle\rangle R/C$. Así, verbigracia, si $R = \{\langle x, y \rangle | x \text{ es un libro escrito por } y\}$ y $C = \{x | x \text{ es una novela policíaca}\}$, $R/C = \{\langle x, y \rangle | x \text{ es una novela policíaca y } x \text{ es un libro escrito por } y\}$.

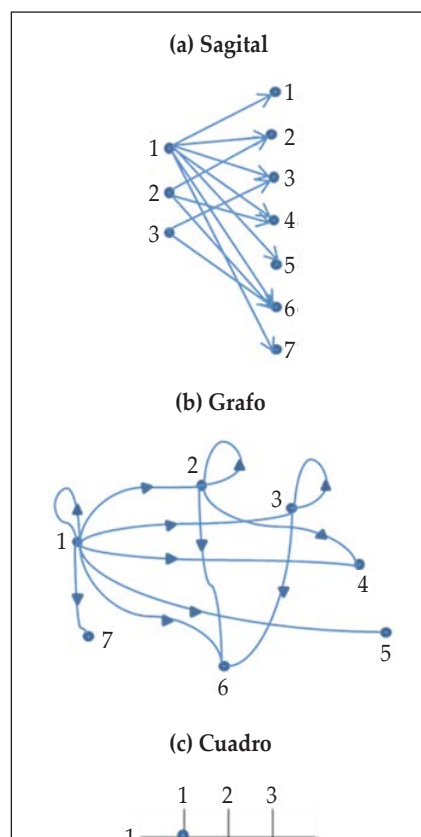
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

ha escrito el libro y y si R fuera la relación: $R = \{\langle x, y \rangle | x \text{ es progenitor de } y\}$, $R^{-1} = \{\langle x, y \rangle | x \text{ es hijo de } y\}$.

- Producto relativo de las relaciones R y S .** Se denomina producto relativo de dos relaciones R y S , que se denota por « $R|S$ », a la relación puente entre R y S . Es, por tanto, una nueva relación formada por los pares $\langle x, y \rangle$, tales que x es el primer miembro de un par de R , cuyo segundo miembro es el primer miembro de un par de S que tiene y como segundo miembro. Más coloquialmente, x tiene a su derecha en R algo que está a la izquierda de y en S . Por consiguiente, $R|S \triangleq \{\langle x, y \rangle | \exists Z | \langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in S\}$. Por ejemplo, si $R = \{\langle x, y \rangle | x \text{ es primo de } y\}$ y $S = \{\langle x, y \rangle | x \text{ es hijo de } y\}$, entonces $R|S = \{\langle x, y \rangle | x \text{ es sobrino de } y\}$ y $S|T = \{\langle x, y \rangle | x \text{ es hijo de un primo de } y\}$.

Figura 1. Distintas representaciones de una relación



2.4.1. Representación de relaciones

Una relación puede representarse de distintas maneras, entre las que cabe destacar las siguientes: **grafo**, **sagital** o mediante un **cuadro**. Sean, verbigracia, los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ y } B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Y sea la relación R dada por $x \in A$ divide a B , obteniéndose el conjunto C , tal que

$$C = ARB = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3)\}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

2.5. PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Las relaciones, en tanto que conjunto de pares, pueden tener propiedades, que pueden ser de cierto tipo, en función de qué les ocurra a sus pares conjuntamente considerados. Por ejemplo, una relación puede ser tal que siempre que tenga un par, tenga también un par opuesto (verbigracia, «ser hermano de»), o que no tenga nunca dos pares opuestos (verbigracia, «ser progenitor de») o que todo elemento del campo esté relacionado consigo mismo (verbigracia, «ser tan o más alto que») etc. Teniendo esto en cuenta, las propiedades más destacadas de las relaciones son las siguientes:

- **Reflexividad.** Se da cuando todo objeto del campo está relacionado consigo mismo. Formalmente, R es reflexiva $\Leftrightarrow \forall x (x \in \text{«Cam»} \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$.
- **Irreflexividad.** En este caso, ningún objeto está relacionado consigo mismo. Formalmente, R es irreflexiva $\Leftrightarrow \forall x (x \in \text{«Cam»} \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$.
- **Simetría.** Para todo par, el par converso está también en la relación. Formalmente, R es simétrica $\Leftrightarrow \forall x, y (\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$.
- **Asimetría.** Cuando ningún par está invertido en la relación. Formalmente, R es asimétrica $\Leftrightarrow \forall x, y (\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \notin R)$.
- **Antisimétrica.** Cuando los únicos pares conversos, caso de haber alguno, son los idénticos; es decir, con ambos miembros idénticos, o, dicho de otro modo, no hay dos pares «diferentes» invertidos. Formalmente, R es antisimétrica $\Leftrightarrow \forall x, y (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$.
- **Transitividad.** La relación se «hereda»; es decir, siempre que un objeto esté relacionado con otro y este lo esté con un tercero, el primero también está relacionado con el tercero. Formalmente, R es transitiva $\Leftrightarrow \forall x, y, z (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$.
- **Intransitividad.** No hay ninguna secuencia de pares transitivos. Formalmente, R es intransitiva $\Leftrightarrow \forall x, y, z (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \notin R)$.
- **Conexión débil.** Cualesquiera dos objetos del «campo» diferentes están relacionados en un sentido u otro o en los dos. Formalmente, R es conexa $\Leftrightarrow \forall x, y (x \in \text{«Cam»} \wedge y \in \text{«Cam»} \wedge x \neq y \rightarrow \langle x, y \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in R)$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

irreflexiva, simétrica e intransitiva. $T = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$ es irreflexiva, asimétrica, antisimétrica, transitiva y conexa. $U = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ no tiene ninguna de estas propiedades. \emptyset tiene todas las propiedades, pues hace falso el antecedente de todos los definientes. $V = \{\langle 1, 2 \rangle\}$ es irreflexiva, asimétrica, antisimétrica, transitiva, intransitiva y conexa; en este caso, la transitividad e intransitividad se cumplen ambas porque se cumplen vacuamente. $W = \{\langle 1, 1 \rangle\}$ es reflexiva, simétrica, transitiva, conexa y fuertemente conexa. $Q = \{\langle x, y \rangle | x \text{ e } y \text{ tienen los mismos progenitores}\}$ es reflexiva, simétrica y transitiva. $P = \{\langle x, y \rangle | x \text{ es más alto que } y\}$ es irreflexiva, asimétrica, antisimétrica y transitiva. $O = \{\langle x, y \rangle | x \text{ ama } a\}$ no tiene ninguna de estas propiedades.

Entre estas propiedades se dan las implicaciones siguientes: simetría más transitividad implican reflexividad; asimetría implica tanto irreflexividad como antisimetría; y conexión débil más reflexividad implican conexión fuerte.

Teniendo en cuenta los grafos de las relaciones, una relación es **reflexiva** si y solo si su grafo, tal y como se muestra en la figura 2, tiene un bucle en cada uno de sus puntos; en caso contrario, recibe el nombre de **antirreflexiva**.

Una relación es **simétrica** si, tal y como se muestra en la figura 3, cada vez que su grafo tiene una flecha que va de a hacia b , también

Figura 2. Representación de la reflexividad

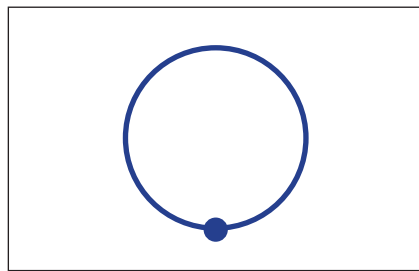


Figura 3. Representación de simetría

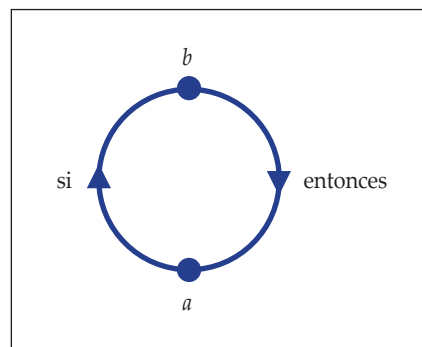
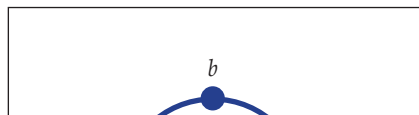


Figura 4. Representación de la transitividad



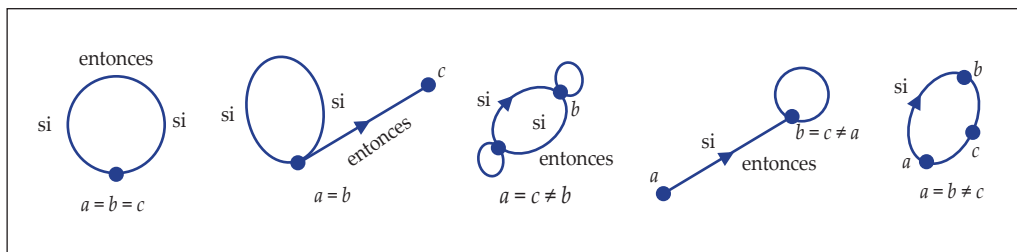
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

y otra flecha va de b hacia c , «entonces» una flecha va de a hacia c , y esto cualquiera que sean los puntos a, b, c distintos o no. En este caso, se tienen las diversas relaciones que se muestran en la figura 5.

Figura 5. Diversas formas de transitividad



2.6. COMPOSICIÓN DE RELACIONES

La relación $M \circ P$ se llama compuesta de las relaciones P y M . En general $M \circ P \neq P \circ M$. Si a y b son relaciones, se tiene la fórmula dada por la figura 6: $(B \circ A)^{-1} = A^{-1} \circ B^{-1}$.

La composición de relaciones es «asociativa»; es decir, se cumple $C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A$, tal y como se muestra en la figura 7.

Por ejemplo, si \perp es una relación de perpendicularidad definida en un conjunto C de rectas del plano π , y \parallel es una relación de paralelismo definida en un conjunto C de rectas del plano π , entonces se demuestra fácilmente que:

Figura 6. Representación de la composición de relaciones

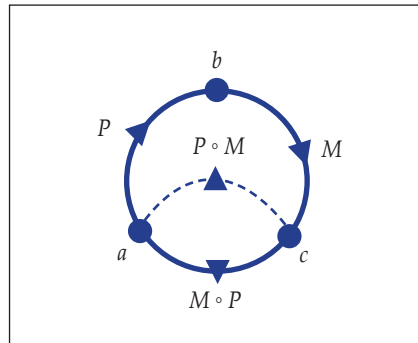


Figura 7. Asociatividad de la composición de relaciones

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



2.7. RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

- Una relación binaria R en un conjunto A es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva. En otros términos, una relación binaria \mathcal{R} se denomina **relación de equivalencia** si es a la vez reflexiva, simétrica y transitiva. Esto significa que para todo x se tiene que $x \mathcal{R} x$, y que $x \mathcal{R} y$ implica que $y \mathcal{R} x$ y que $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z$ implican que $x \mathcal{R} z$. La igualdad, el paralelismo de vectores y la semejanza de triángulos son relaciones de equivalencia. Para subrayar que una relación ε es de equivalencia, a veces, se emplea la notación específica $x \equiv y$ (mód ε), que se lee « x es congruente con y módulo ε », y también « x es equivalente a y módulo ε ». Si no hay confusión posible, se dirá « x es equivalente a y ».

Desde un punto de vista formal, y como ya se comentó, toda relación de equivalencia ε generaliza, pues, las propiedades de igualdad. Recíprocamente, la igualdad aparece con frecuencia, como «contracción» de una equivalencia. Ya que no son «idénticos» los símbolos $2/3$, $4/6$, $6/9$, no son «iguales», pero sí lo son los números racionales que representan $0,6$, puesto que los símbolos son equivalentes según se desprende de la conocida regla «producto de medios igual a producto de extremos». Esta noción de equivalencia no es exclusiva, ni mucho menos, de las matemáticas. Por ejemplo, la «fonología» de una lengua considera como equivalentes dos sonidos que el «fonético» reconoce como diferentes, con tal de que estos sonidos no se hallen jamás en oposición y que la sustitución de uno por el otro sea indiferente en la comunicación de dos personas que hablan. La clase de equivalencia es el «fonema».

- Una clase de equivalencia de un elemento $a \in A$ es el conjunto $[a] = \{x \in A / xRa\}$, y verifica las propiedades siguientes:
 - $\forall a \in A, [a] \neq \emptyset$.
 - $[a] = [b] \Leftrightarrow aRb$.
 - Si $[a] \neq [b]$, entonces $[a] \cap [b] = \emptyset$.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Los subconjuntos A_i se denominan **bloques de la partición** o **clases**. Una relación de equivalencia en un conjunto produce una partición del conjunto, y, recíprocamente, una partición de un conjunto determina una relación de equivalencia en el conjunto.

Teorema

Si R es una relación de equivalencia en A , entonces $A/R = \{[a]/a \in A\}$ es una partición de A .

(La demostración del teorema aparece en la bibliografía).

Teorema

Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_p, \dots\}$ una partición de A ; entonces la relación R definida en A por $aRb \Leftrightarrow \exists i \in I$, tal que $a, b \in A_i$, es una relación de equivalencia en A .

(La demostración del teorema aparece en la bibliografía).

Por ejemplo, sea A igual que antes:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y una partición de A dada por $P = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$, entonces la relación $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5), (4, 4)\}$ es una relación de equivalencia en A , cuyo conjunto cociente es $A/R = \{[1], [3], [4]\}$.

2.8. RELACIONES DE ORDEN: MAYORANTES, MINORANTES. LÍMITES. CARDINALES Y ORDINALES

Una relación binaria \mathcal{R} se dice que es una relación de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En otros términos: para todo x se verifica $x \mathcal{R} x$, $x \mathcal{R} y$ y $y \mathcal{R} x$ implican $x = y$; finalmente, $x \mathcal{R} y$ y $y \mathcal{R} z$ implican $x \mathcal{R} z$. Por ejemplo, sobre el conjunto de los números enteros, la relación $x < y$ es una relación de orden. Dicha relación, al admitir la

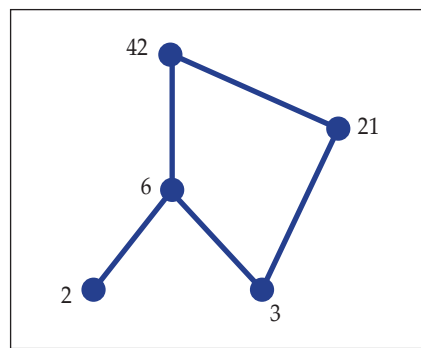
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



siguiente: dos elementos a y b son siempre «comparables» mediante la relación \leq , ya que siempre se tendrá $a \leq b$ o bien $b \leq a$, e incluso las dos si $a = b$, mientras que dos elementos como 7 y 36 «no son comparables» mediante la relación \nmid . El hecho de que 7 no divida a 36 no implica que 36 divida a 7. Así pues, la relación \leq es una relación de **orden total**, en tanto que \nmid es una relación de **orden parcial**.

Muchas veces conviene representar por un diagrama un conjunto ordenado mediante una relación de orden total o parcial. Para ello, los elementos se simbolizan con puntos (\cdot) o circulitos (\circ), dos elementos comparables se unen por una línea, y, si $a \mathcal{R} b$, se coloca b encima de a . La figura 8 representa el conjunto $\{2, 3, 6, 21, 42\}$ ordenado por \nmid .

Figura 8. Diagrama de relación \nmid 

La relación « a es un ascendiente de b » es una de esas relaciones que pueden denominarse de **orden estricto**. Su diagrama está compuesto de árboles genealógicos. El orden es parcial.

La relación \subseteq , definida en el conjunto de las partes de un referencial, es una relación de orden parcial, quizás la más primitiva de todas.

- **Mayorantes y minorantes.** Límites superior e inferior. Sea A un conjunto dotado con una relación de orden \mathcal{R} . Si el orden es total, se empleará el signo \leq , que se lee «inferior o igual a»; si el orden es parcial, se utilizará el símbolo \wp , que se leerá «precede» o «es anterior a».

Si $a \leq b$, o si $a \wp b$, se dice también que b es un «mayorante» para a . Si A' es una parte de A tal que para todo $a \in A'$, se verifica que $a \leq b$ o $a \wp b$, se dice que b es un «mayorante» de A' .

En el caso del orden total, si el conjunto de todos los mayorantes de A' con-

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

enteros naturales, todo subconjunto admite un límite inferior y lo contiene. En el conjunto de los racionales, el subconjunto A' de elementos de la forma $1 - 1/n$ con n entero y positivo admite el 1 como límite superior, pero no lo contiene; es «abierto». Añadiéndole el 1 se obtiene el conjunto cerrado \bar{A}' . El conjunto de los números «racionales» x , tales que $x^2 < 2$ admite como mayorantes 1,5 o 1,42 o 1,415..., pero se demuestra que tal conjunto no tiene límite superior en el conjunto de los números racionales.

- **Cardinales.** Sea \mathcal{F} un conjunto de conjuntos, mejor llamado **familia** de conjuntos: $\mathcal{F} = \{A, A', A'', \dots\}$ finito o infinito. Se escribirá $A \equiv A'$ si y solo si existe una biyección de A en A' . Entonces, \equiv es una relación de equivalencia sobre \mathcal{F} . Cada clase se denomina **número cardinal** o simplemente **cardinal**, y se dirá que dos conjuntos de una misma clase tienen la misma «potencia». Verbigracia, los días de la semana y las maravillas del mundo antiguo tienen la misma potencia: 7.

Cuando un conjunto es aplicable biunívocamente sobre el conjunto \aleph^* de los números enteros naturales, se dice que es **numerable** o que su cardinal es \aleph_0 , alef de índice 0. El conjunto de los pares, el de los cuadrados perfectos y el de los números primos son conjuntos numerables. De lo anterior, se deduce que un conjunto infinito puede tener la misma potencia que una de sus partes propias.

- **Ordinales.** Sea $\mathcal{D} = \{B, B', B'', \dots\}$ una familia de conjuntos totalmente ordenados. Se escribirá $T \equiv T'$ si y solo si existe una aplicación biunívoca de T sobre T' que conserve el orden; es decir, que si $a \leq b$, se deberá tener $a' \leq b'$ para las imágenes. Se demuestra, con relativa facilidad, que \equiv es una relación de equivalencia. A cada clase se le denomina un **tipo de orden**. Un conjunto se dice **bien ordenado** si todo subconjunto no vacío admite un primer elemento. \mathbb{N} , ordenado naturalmente, está bien ordenado. La clase de un conjunto bien ordenado es un «tipo de buen orden» o un «ordinal». La clase de \mathbb{N}^* es el primer «ordinal transfinito» que se designa por ω .

3. APLICACIONES

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



como un «operador», que se designa por la letra f , g , T , ... Si $a \in A$, $f(a)$ designa el «aplicado» o transformado de a y representa, por consiguiente, un elemento de B . Se describe $a \xrightarrow{f} f(a)$, y se dice que a se aplica sobre $f(a)$.

Es importante distinguir claramente los tres elementos que intervienen en una aplicación. El elemento $a \in A$, f , el operador, y $f(a) \in B$. Con frecuencia es cómodo designar con otra letra, verbigracia, b , al elemento de B denotado por $f(a)$. En tal caso se escribe $a \rightarrow b: f(a)$, pero esto no es más que un convenio de escritura que interesa separar de la noción de aplicación.

Al elemento $f(a)$ se le denomina **imagen** de a . Recíprocamente, a es el antecedente de $f(a)$. A se denomina **conjunto inicial**, **origen** o **de partida** o aun **dominio**, y B , **conjunto final**, **llegada** o **codominio de la aplicación**.

Con frecuencia, se encuentran aplicaciones de un conjunto A en sí mismo; es decir, $A = B$. En estas condiciones, existe una aplicación particular tal que, a todo $a \in A$, asocia el mismo elemento a . Es la «aplicación idéntica», generalmente denotada por I .

3.2. RESTRICCIÓN DE UNA APLICACIÓN

Sea A_1 un subconjunto cualquiera de A . Toda aplicación de A en B determina una aplicación de A_1 en B , en la que la imagen de un elemento de A_1 queda definida en virtud de pertenecer a A . Esta aplicación se llama **restricción** de f a A_1 .

3.3. GRAFO DE UNA APLICACIÓN

Recibe este nombre el subconjunto del conjunto producto $A \times B$, constituido por los pares $[a, f(a)]$ asociados en la aplicación. Así, por ejemplo, en la teoría ordinaria de funciones, el grafo de la aplicación $x \rightarrow f(x)$ está constituido por el conjunto de los puntos (x, y) del plano, tales que $y = f(x)$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Si A_1 se reduce a un solo elemento, su imagen queda igualmente reducida a un elemento, de acuerdo con la definición de la aplicación. Si $A_1 = A$, el subconjunto obtenido $f(A)$ se llama **subconjunto «imagen» de la aplicación**. En cualquier caso, se tiene que $f(A) \subseteq B$.

- Aplicación suprayectiva o sobre. Si se verifica que $f(A) = B$, de modo que el conjunto de las imágenes recubre totalmente a B , la aplicación se denomina **sobre** o **suprayectiva** y se dice que es una **suprayección**. Se emplea también la expresión «aplicación de A sobre B », reemplazando la preposición «en», utilizada en el caso general, por la preposición «sobre». Por definición de $f(A)$, la aplicación de A en $f(A)$ es, evidentemente, suprayectiva.

Considérese ahora una parte B_1 de B . Se denomina «imagen recíproca» de B_1 por f al subconjunto de todos los $a \in A$, tales que $f(a) \in B_1$. Se denotará por $f^{-1}(B_1)$ esta parte de B , conviniendo además que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Adviértase que si f no es «suprayectiva», se puede tener $f^{-1}(B_1) = \emptyset$, incluso siendo $B_1 \neq \emptyset$. Para ello es suficiente que B_1 y el subconjunto imagen sean distintos.

- Se dice que una aplicación de A en B es **inyectiva** o también que es una **inyección**, cuando dos elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B . Por consiguiente, todo elemento de B puede tener como máximo un antecedente; es decir, la imagen recíproca de todo punto será, o bien vacía, o bien estará reducida a un punto.
- Aplicación biyectiva. Una aplicación f de A en B que sea a la vez «suprayectiva» e «inyectiva» se denomina **biyectiva**. También se dice que es una **biyección**. En tal aplicación, todo $b \in B$ admite un antecedente y solo uno en A , lo que define una aplicación de B en A . Esta nueva aplicación es suprayectiva, ya que todo elemento a de A es antecedente del elemento $f(a)$ de B . Es también inyectiva, ya que dos elementos diferentes de B no pueden tener el mismo antecedente en A . Se ha obtenido, pues, una biyección de B en A , llamada **biyección recíproca** de f , o las dos igualdades equivalentes siguientes: $b = f(a)$ o $a = f^{-1}(b)$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

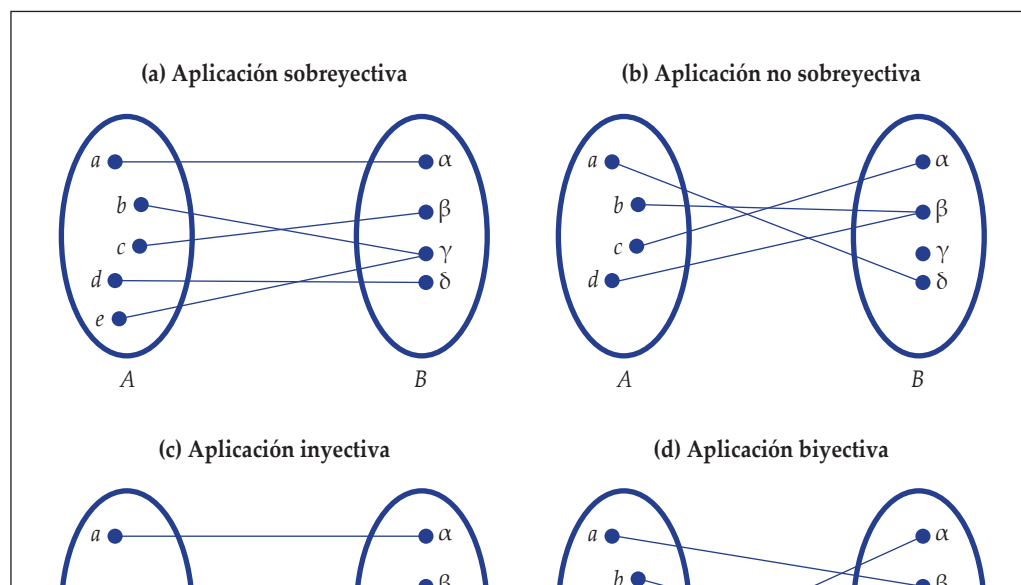
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

cación inyectiva se ha empleado el símbolo $f^{-1}(B_1)$ para designar la imagen recíproca de una parte de B , y, en este caso, f^{-1} no designa una aplicación de B en A . Sin embargo, hay que hacer constar que si se trata de una biyección, la imagen recíproca de un subconjunto reducido a un elemento, $f^{-1}(\{b\})$, coincide con el transformado $f^{-1}(b)$ en la biyección recíproca. Por lo tanto, no hay contradicción en los dos usos del signo f^{-1} .

Finalmente, indicar que, a veces, se dice de una aplicación que es **biunívoca**. Si no se añade nada más, esto significa que por tener todo elemento de A una imagen, toda «imagen» tiene solo un antecedente; por consiguiente, la transformación es inyectiva. Pero si se precisa que la transformación sea biunívoca entre A y B , se debe entender que, al tener todo elemento de B un antecedente y uno solo, existe una biyección de A sobre B , con su biyección recíproca de B sobre A .

La figura 9 muestra gráficamente los distintos tipos de aplicaciones considerados:

Figura 9. Tipos de aplicaciones



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

3.5. COMPOSICIÓN DE APLICACIONES

Existen varios tipos de composición de aplicaciones. Las más importantes son el producto y la autoaplicación que se consideran a continuación:

- Producto de dos aplicaciones.** Sean tres conjuntos cualesquiera A, B, C , y considérese una aplicación f de A en B y una aplicación g de B en C . Si $a \in A$, f da una imagen $b = f(a)$, y g da de b una imagen $c = g(b)$. El paso directo de a a c define una aplicación h de A en C , tal que $c = h(a) = g[f(a)]$. Por definición, h se denomina **compuesta o producto** de las aplicaciones f y g . Simbolizando esta ley de composición por el signo \circ , se escribe $h = g \circ f$ y se lee g «compuesto, producto o círculo».

Para respetar la notación funcional se está obligado a escribir las sucesivas aplicaciones de derecha a izquierda. Es interesante señalar que el producto \circ la composición definida de esta manera no es una ley de composición en el sentido dado a ese término anteriormente. En efecto, f, g y h no son elementos de un mismo conjunto.

La composición \circ producto de aplicaciones es asociativa. Sean cuatro conjuntos A, B, C y D , y sea f una aplicación de A en B , g una aplicación de B en C y h una aplicación de C en D . La asociatividad se expresa por la fórmula $h \circ (g \circ f)a = (h \circ g) \circ f$, que resulta de la definición del producto; en efecto, para $a \in A$, el primer miembro da $[h \circ (g \circ f)]a = h[g \circ f(a)] = h(g[f(a)])$ y el segundo $[(h \circ g) \circ f]a = (h \circ g)f(a) = h(g[f(a)])$. Que manifiesta la identidad de los resultados, cualquiera que sea el elemento de A considerado.

- Aplicación de un conjunto en sí mismo.** Considérese el caso particular de que los conjuntos B y C se confunden con A . Entonces, las aplicaciones f y g pertenecen al mismo conjunto: el de las aplicaciones de A en A . Este conjunto está bien definido, caracterizándose en él la igualdad por $f = f'$ si $f(a) = f'(a)$ para todo $a \in A$. Esta definición asocia a las aplicaciones f y g tomadas en este orden una aplicación producto, $g \circ f$, que pertenece igualmente al conjunto considerado. Se tiene, pues, una ley de composición sobre este

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



- **Propiedades de la ley.** La ley de composición que acaba de definirse presenta las propiedades siguientes:
 - *Elemento neutro.* La ley admite un elemento neutro: la aplicación idéntica i que para todo $a \in A$ asocia $i(a) = a$. Se comprueba, en efecto, que para cualquier $f: i \circ f = f \circ i = f$.
 - *Simétrico.* Toda aplicación f de A en sí misma admite una aplicación simétrica o inversa con condiciones dadas por el teorema siguiente:

Teorema

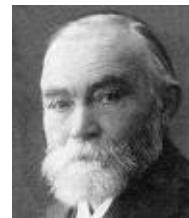
Una aplicación f de A en sí misma admite una aplicación simétrica, inversa, para la ley \circ si y solo si es biyectiva.

(La demostración de este teorema aparece en la bibliografía).

4. FUNCIONES

4.1. GENERALIDADES

La noción de **función**, en principio no difiere del concepto de «aplicación». Precisamente hablando, solo se diferencia en que se usa el término «función» cuando A y B son conjuntos de números. También se adoptan para este caso algunas variantes de terminología. En efecto, a es entonces la variable, generalmente designada por x ; A es el dominio de definición, y B , el dominio de valores.



Gottlob Frege. Nacido en Wismar (actual Alemania) en 1848.

En 1879 publicó su revolucionaria obra *Conceptografía (Begriffsschrift)*, en la que sentó las bases de la lógica matemática moderna iniciando una nueva era en esta disciplina, que había permanecido prácticamente inalterada desde Aristóteles.

Frege fue el que dio contenido lógico al con-

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

El término «función» proviene del latín *function*, que se deriva del verbo *fungi*, y significa cumplir. El concepto de «función» es fundamental en todas las ciencias y, naturalmente, en matemáticas. De hecho, en toda teoría matemática hay que determinar cuáles son los conjuntos, las relaciones y las funciones relevantes de la misma. Por ejemplo, el álgebra lineal considera espacios vectoriales y funciones lineales; en la teoría de grupos de los conjuntos, los grupos y las funciones son los homomorfismos, que conservan las operaciones; en topología, son, respectivamente, los conjuntos abiertos y las funciones continuas, etc.

Un ejemplo conspicuo son los polinomios y las funciones algebraicas, tales como $y = x^3 - 2x + 4$. Si en ella se sustituye x por, verbigracia, el número 3, se obtiene el valor $y = 25$. En tanto que si se hace $x = -3$, resulta $y = -17$. Se dice que 25 y -17 son los valores que toma la función en $x = 3$ y $x = -3$.

Evidentemente, la composición de funciones sigue las reglas de la composición de aplicaciones.

4.2. DESCRIPCIÓN DE CONJUNTOS

Las funciones también sirven para describir conjuntos. En efecto, sea, verbigracia, el conjunto C la circunferencia unidad en el plano. Entonces, un conjunto C puede describirse de alguna(s) o incluso de todas las formas siguientes:

- **Implícita.** O como un conjunto de nivel; es decir, como antes:

$$C = f^{-1}(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \text{ donde } f(x, y) = x^2 + y^2$$

- **Paramétrica.** Como una imagen: $C = \{(\cos t, \sin t) \mid 0 \leq t < 2\pi\}$. En efecto, si se considera la función cuyo dominio es el intervalo $[0, 2\pi]$ dada por $f(t) = (\cos t, \sin t)$, resulta que $f([0, 2\pi]) = \text{Im}g(f) = C$.
- **Explícita.** En este caso, un conjunto es la gráfica de una función. Por ejemplo, la semicircunferencia $C^+ = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ es la gráfica de la función $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, i = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

más un exceso próximo a 6 horas. En tiempos del emperador romano Julio César, se instauró un calendario con 1 año de 365 días, más una corrección de 1 día más cada 4 años, para compensar las casi 6 horas perdidas, dando lugar a los años bisiestos. Sin embargo, como el tiempo real que tarda la Tierra en recorrer su órbita es un poco menor, al cabo de los siglos, el error convertido, no despreciable en absoluto, dio lugar a un cierto adelanto del calendario. Hacia 1582, en tiempos del papa Gregorio XIII, este error se cifró en 10 días. La manera de corregir esa acumulación de pequeños adelantos originó el calendario «gregoriano», el actualmente vigente. En este calendario siguen existiendo bisiestos; esto es, febrero tiene 29 días los años múltiplos de 4, excepto los últimos años de cada siglo, que solo lo serían si, además, fueran divisibles por 400. Es decir, 1700, 1800 y 1900 no fueron bisiestos, mientras que 1600 y 2000 sí lo fueron.

Teniendo esto en cuenta, si se quisiera saber, verbigracia, qué día de la semana fue el 12 de enero de 1910, se procedería de acuerdo con el príncipe de las matemáticas, Gauss, quien ideó una sencilla fórmula que permite responder al tipo de cuestiones que exponemos a continuación.

$S = D + M + Z + W$, siendo S el día pedido; D , el número del día, en el ejemplo $D = 12$; M es una función que solo depende del mes, en particular $M(\text{enero}) = 0$ (dicha función se explicita en la tabla 2); Z es otra función, que aparece descrita en la tabla 3, y depende del número de centenas del año, en este caso $Z(19) = 1$; finalmente, W es otra función, cuya descripción aparece en la tabla 4, y solo depende de las dos últimas cifras del año, en este caso $W(10) = 5$. Por último, se divide S por el número de días de la semana (7) y se obtiene el resto, que buscado en la tabla 5, da como resultado «miércoles», es decir, el día 12 de enero de 1910 fue miércoles.

Tabla 2. Valores de la función M

$M(\text{enero}) = 0$	$M(\text{abril}) = 6$	$M(\text{julio}) = 6$	$M(\text{octubre}) = 0$
$M(\text{febrero}) = 3$	$M(\text{mayo}) = 1$	$M(\text{agosto}) = 2$	$M(\text{noviembre}) = 3$
$M(\text{marzo}) = 3$	$M(\text{junio}) = 4$	$M(\text{septiembre}) = 5$	$M(\text{diciembre}) = 5$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Tabla 4. Valores de la función W

Últimas cifras del año									W
00	06		17	23	28	34		45	0
01	07	12	18		29	35	40	46	1
02		13	19	24	30		41	47	2
03	08	14		25	31	36	42		3
	09	15	20	26		37	43	48	4
04	10		21	27	32	38		49	5
05	11	16	22		33	39	44	50	6
51	56	62		73	79	84	90		0
	57	63	68	74		85	91	96	1
52	58		69	75	80	86		97	2
53	59	64	70		81	87	92	98	3
54		65	71	76	82		93	99	4
55	60	66		77	83	88	94		5
	61	67	72	78		89	95		6

Tabla 5. Correspondencia del resto con el día de la semana

--	--	--	--

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



¿Por qué funciona la fórmula de Gauss? En primer lugar, no es extraño que el resto que da un número al dividirlo por 7 desempeñe un papel tan crucial; después de todo en cada semana hay exactamente 7 días. Por ejemplo, considérese la función M y hágase $M(\text{enero}) = 0$. Ahora bien, enero tiene 31 días; es decir, $31 = 4 \times 7 + 3$, que son 4 semanas justas y sobran, en este caso, 3 días; por eso, $M(\text{febrero}) = 3$. Esto es, si enero empieza en domingo, entonces febrero empieza en martes; si enero empieza en lunes, entonces febrero empieza en miércoles, y así sucesivamente.

Por otra parte, salvo los bisiestos, febrero tiene 28 días, que son 4 semanas justas, luego marzo comienza el mismo día de la semana que febrero: $M(\text{marzo}) = M(\text{febrero}) = 3$. Por el contrario, marzo tiene 31 días, de nuevo $4 \times 7 + 3$, lo que hace que $M(\text{abril}) = M(\text{marzo}) + 3 = 6$. Mayo, por un razonamiento similar, al tener solo 30, da $M(\text{mayo}) = M(\text{abril}) + 2 \pmod{7}$; o sea, $M(\text{mayo}) = 1$, que es el resto de dividir 8 por 7, y así sucesivamente.

Finalmente, las funciones Z y W introducen las correcciones debidas a los años bisiestos.

Naturalmente, este ejemplo también podría utilizarse en la aritmética modular. Se pide como ejercicio decir por qué.

4.4. FUNCIONES DE DISPERSIÓN: FUNCIONES «HASH»

Una de las aplicaciones más importantes en informática de las funciones son las funciones de dispersión o funciones «Hash», que, entre otras cosas, sirven para almacenar datos. Para ello, si se conocen los datos de entrada, se construye una función $H: Z \rightarrow Z_m$, que asigna a cada clave k un número, $H(k)$, de 1 a m . Este número sirve de índice para seleccionar una posición en una tabla formada por m registros de memoria.

Supóngase, verbigracia, que se tienen 2.000 personas y se dispone de 5.000 posiciones de memoria. En lugar de guardar los 2.000 números de DNI (documento nacional de identidad) se toma $m = 5.000$, o un número primo próximo a 5.000, y se utiliza

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Tabla 6. Valores y módulos del ejemplo

Valores	132			102	15	5				558	32
Módulos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Si ahora se quiere guardar, verbigracia, 257, como $H(257) = 4$, entonces se tendría que guardar 257 en la celda 4. Ahora bien, como puede verse, la celda 4 ya está ocupada por el 15; entonces, se dice que se produce una colisión: $H(x) = H(y)$ con $x \neq y$. Una forma de resolver las colisiones consiste en asignar la siguiente celda mayor vacía. En este caso ocuparía la posición 6.

Si se quisiera, ahora, localizar un valor ya guardado n , se calcula $m = H(n)$ y se comienza a buscar en la posición m . Si n no está en esa posición, se pasa a la siguiente mayor, y así sucesivamente. Si se llega a una celda vacía o se regresa a la posición inicial, entonces n no está presente.

5. MORFISMOS

Este concepto, junto con el de «ducción» (abducción, deducción, inducción y retro-ducción) son quizás las dos ideas más poderosas, fructíferas y ubicuas del método científico, por eso se tratan aquí los morfismos con alguna amplitud y profundidad.

- Isomorfismo.** La noción de isomorfismo es uno de los conceptos básicos del álgebra moderna. Sean dos conjuntos C y C' , y f , una biyección de C sobre C' . Supónganse definidas sobre C' una ley de composición, denotada por $*$, y otra sobre C simbolizada por $*'$. La biyección se llama «regular» respecto a las leyes $*$, y $*'$ si la igualdad $a * b = c$, supuesta verificada en C , implica para las imágenes $f(a)$, $f(b)$ y $f(c)$ la igualdad: $f(a) *' f(b) = f(c)$, que se verifica sobre C' . Esto equivale a decir que el transformado

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



nece igualmente a la ley $*$ ' de C' . Los dos conjuntos poseen, pues, propiedades algebraicas idénticas. Son isomorfos, del griego *isos*, esto es, «igual», y *morfé*, es decir, «forma», y pueden considerarse como dos realizaciones concretas de la misma estructura algebraica.

Esta noción se extiende además a estructuras más ricas. Sobre C y C' puede existir un mismo número de leyes de composición; a toda ley de C debe corresponder una ley de C' , tal que f sea regular para cada par. Cabe también que existan relaciones binarias: \mathcal{R} sobre C , \mathcal{R}' sobre E' ; la biyección f se denomina regular respecto a \mathcal{R} y \mathcal{R}' si $a\mathcal{R}b$ implica $f(a)\mathcal{R}'f(b)$. Entonces, las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{R}' gozan de las mismas propiedades. Los dos conjuntos C y C' se dicen isomorfos para las estructuras definidas por las leyes y relaciones consideradas. Algunos ejemplos aclararán lo anterior:

- Los símbolos 0, 1, 10, 11, 100, ..., empleados en la numeración binaria, y los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., del sistema decimal, forman dos conjuntos isomorfos para las leyes de composición interna $+$, la relación $<$, etc. Estos dos conjuntos «concretos» son isomorfos con el conjunto «abstracto» de los enteros, del que dan dos representaciones.
- En matemáticas elementales uno se familiariza, en un espíritu eminentemente práctico, con el isomorfismo que liga el conjunto de los números estrictamente positivos al conjunto de todos los números relativos, isomorfismo cuyo «léxico» es la tabla de logaritmos y cuya gramática tiene las reglas siguientes:
 - \times corresponde a $+$.
 - $:$ corresponde a $-$.
 - Elevar a la potencia de n corresponde a multiplicar por n .
 - Extraer raíz n -ésima corresponde a dividir por n .
 - \leq corresponde a \leq .

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

- Que un número afectado de un signo no es ya un número ordinario.
- Que el conjunto de números precedido del signo + es isomorfo con el de los números ordinarios.
- Que la asimilación es un convenio, cuya posibilidad se basa en dicho isomorfismo.

La construcción de los números racionales da lugar a una observación análoga para los símbolos n/L .

Una observación adicional es pertinente sobre lo dicho. Supóngase que existe una biyección f entre dos conjuntos A y A' . Si A posee ciertas leyes de composición, es posible definir leyes correspondientes sobre A' . A toda ley $*$ sobre A se asocia una ley $'$ sobre A' definiendo el compuesto $c' = a' *' b'$ de los elementos $a' = f(a)$, y $b' = f(b)$ por $c' = f(c)$, siendo $c = a * b$. De este modo, los dos conjuntos resultan isomorfos. Se dice, entonces, que las operaciones sobre A' se han definido por isomorfismo.

- **Automorfismo.** Un caso particular es el automorfismo. Sea A un conjunto sobre el que está definida una ley $*$. Si f es una biyección en sí misma, regular para esta ley, entonces, como los conjuntos A y A' se confunden, el isomorfismo correspondiente recibe el nombre de «automorfismo». Por ejemplo, en geometría euclídeana, la simetría con relación a un plano es un automorfismo del conjunto de los vectores libres del espacio dotado de la ley clásica de adición.
- **Homomorfismo.** Considérense dos conjuntos C y C' dotados respectivamente de leyes de composición $*$ y $'$. Supóngase, además, que existe una aplicación suprayectiva f de C en C' , tal que la imagen del compuesto de a por b mediante $*$ se superpone sobre el compuesto de a' por b' mediante $'$. De forma más precisa: $a \rightarrow a'$ y $b \rightarrow b'$ y $a * b = c$ y $a' *' b' = c'$ implican $c \rightarrow c'$.

Se dice entonces que C' es una «imagen homomorfa» de C , dando a f el nombre de «homomorfismo». Resulta obvio que en el caso de que f sea una bi-

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



los que tienen la misma imagen a' , de suerte que el conjunto cociente C/ε se aplica biunívocamente sobre el conjunto imagen C' por la regla $C(a) \Leftrightarrow a'$.

Por otra parte, ε induce sobre $\bar{C} = C/\varepsilon$ una ley $\bar{*}$, y decir que $C(a) \bar{*} C(b) = C(c)$ o que $a' \bar{*} b' = c'$ equivale evidentemente a traducir el mismo contenido matemático en términos ligeramente diferentes. De manera rigurosa, el conjunto \bar{C} dotado de la ley $\bar{*}$ es isomorfo con C' dotado de $*$.

Si existe un elemento neutro e tal que $a * e = e * a = a$ cualquiera que sea a , su imagen e' da $a' * e' = e' * a' = a'$ cualquiera que sea a' , ya que todo a' es imagen. Es decir, la imagen del elemento neutro es neutro, y en C/ε corresponde a una clase neutra $C(e)$.

Teorema

Sea C un conjunto dotado de una ley de composición $*$. Si C' es una imagen homomorfa de C por la aplicación f , la equivalencia ε asociada a f determina un conjunto cociente C/ε que es isomorfo con E' dotado de la ley $*$.

- **Endomorfismo.** Si el conjunto \bar{C}' es una parte de \bar{C} , el homomorfismo recibe el nombre de «endomorfismo».



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CONCEPTOS BÁSICOS A RETENER

- Relación: relación de equivalencia y orden.
- Aplicaciones y funciones diferenciales.
- Tipos de aplicaciones y funciones: inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.
- Morfismos y sus tipos.



EJERCICIOS VOLUNTARIOS

Tras el estudio de esta Unidad didáctica, el estudiante puede hacer, por su cuenta, una serie de ejercicios voluntarios, como los siguientes:

1. Dé algunos ejemplos de relaciones monarias, ternarias y cuaternarias.
2. Además de las propiedades de las relaciones dadas en la Unidad, hay otras también interesantes. Identifíquelas y defínalas.
3. Dado el conjunto \mathbb{Z}^* de los enteros positivos:
 - Ver si es o no ordenado, y, si es ordenado, qué tipo de orden es.
 - Dado el subconjunto $S = \{1, 2, 4, 5, 10\}$, calcular sus cotas superior o mayorante e inferior o minorante, su supremo e ínfimo, su maximal, minimal, mínimo: es decir, sus elementos extremales, si existen.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

5. Poner al menos un ejemplo de la restricción de una función y definir y dar un ejemplo de su recíproca, una ampliación de una función.
6. Considérese el conjunto de los divisores de 60. Representélos gráficamente y calcule si existen sus elementos extremales.
7. Considérese ahora los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Sea $\pi(x)$ el número de primos menores o iguales que x : $\pi(1) = 0$, $\pi(7) = 4$, $\pi(20) = 8$, ... Como ejercicio:
 - Calcular los valores $\pi(27)$, $\pi(40)$ y $\pi(200)$.
 - Elaborar, por computador, una tabla de números primos hasta 1.000 y comprobar con ella la propiedad $\pi(2x) - \pi(x) \geq 1$, si $x \geq 1$.
8. Si a cada entero positivo n se le asigna $d(n)$ el número de sus divisores positivos: $d(1) = 1$, $d(2) = 2$, $d(3) = 3$, $d(4) = 3$, $d(10) = 4$, $d(30) = 8$, ..., ¿cómo se denominan los números cuya imagen dada por esa función es 2? Describir los números n tales que $d(n) = 4$.
9. Responder a las siguientes cuestiones: ¿es inyectiva la función $f(x) =$ Lugar de nacimiento de x ? Considérese la función número de divisores de un número, $d(n)$, cuyo dominio son los enteros positivos $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$, y cuyo conjunto de llegada es también \mathbb{Z}^+ . ¿Es inyectiva?
10. Para cada función de dispersión (Hash), mostrar en los casos a), b), c) y d) la forma en que se insertan los datos, en el orden dado, en celdas inicialmente vacías, con:
 - a) $H(x) = x \pmod{11}$.
Celdas: del 0 al 10.
 - b) $H(x) = x^2 \pmod{11}$.
Datos: 53, 13, 281, 743, 377, 20, 10 y 796.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

11. En el conjunto de los enteros relativos, las leyes $+$ y \cdot son estables respecto de la equivalencia $(a \cdot b) = \text{mult} \cdot 2$. Demostrar que las operaciones inducidas son

$$\begin{aligned} \text{par} + \text{par} &= \text{par}, & \text{par} + \text{impar} &= \text{impar}, & \text{impar} + \text{impar} &= \text{par}; & \text{y} \\ \text{par} \cdot \text{par} &= \text{par}, & \text{par} \cdot \text{impar} &= \text{par}, & \text{impar} \cdot \text{impar} &= \text{impar}. \end{aligned}$$



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BREUER, J.: *Iniciación a la teoría de conjuntos*, Madrid, Paraninfo, 1970.

GARCÍA MERAYO, F.: *Matemática discreta*, Madrid, Thomson, Paraninfo, SA, 2005.

LIPSCHUTZ, S.: *Teoría de conjuntos. 530 Problemas resueltos*, Serie de Compendios Schaum, Nueva York, McGraw-Hill, 1963.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUD
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70