ECUACIONES DE MAXWELL

ECUACIONES DE MAXWELL

Vectores del campo electromagnético

Intensidad de campo eléctrico: $\vec{E}(x, y, z, t) \quad V \cdot m^{-1}$

Inducción o desplazamiento magnético: $\vec{B}(x, y, z, t) \quad \text{Tesla}$

$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$ Fuerza de Lorentz

Inducción o desplazamiento eléctrico: $\vec{D}(x, y, z, t) \quad C \cdot m^{-2}$

Intensidad de campo magnético: $\vec{H}(x, y, z, t) \quad A \cdot m^{-1}$

Vectores del campo electromagnético

En el vacío:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

Permitividad eléctrica del vacío:

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \quad \mathrm{F \cdot m^{-1}}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Permeabilidad magnética del vacío:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad \mathrm{H \cdot m^{-1}}$$

Impedancia del vacío:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \quad \Omega$$

Velocidad de la luz en el vacío:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^{8} \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Carga eléctrica

Carga eléctrica: $Q \quad [Q] = \mathrm{Coulomb}$

Densidad de carga eléctrica

- Volumétrica: $\rho = \rho_V = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$ $\quad [\rho_V] = \mathrm{C \cdot m^{-3}}$

- Superficial: $\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS}$ $\quad [\rho_S] = \mathrm{C \cdot m^{-2}}$

- Lineal: $\rho_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}$ $\quad [\rho_l] = \mathrm{C \cdot m^{-1}}$

- Carga puntual: $\rho = q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_q)$

Corriente eléctrica

Intensidad de corriente eléctrica: $I = \frac{dQ}{dt}$ $\quad [I] = \text{Amperios}$

- Densidad volumétrica de corriente:

$\vec{J}$ $\quad [\vec{J}] = A \cdot m^{-2}$ $\quad I = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{dS}$

- Densidad superficial de corriente:

$\vec{J}_S$ $\quad [\vec{J}_S] = A \cdot m^{-1}$ $\quad I = \int_C \vec{J}_S \cdot \hat{n}\, dl$

Corriente eléctrica

Conservación de la carga

- En un sistema aislado la carga neta permanece constante
- Ecuación de continuidad

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \vec{J} \cdot \vec{dS} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho\, dV}$$

Ecuaciones de Maxwell

$$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot\vec{dS} = Q \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS} \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = \iint_S \vec{J}\cdot\vec{dS} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{D}\cdot\vec{dS} \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{J} = \vec{J}_{imp} + \vec{J}_{cond} \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{J}_{imp} + \vec{J}_{cond} + \vec{J}_{desp}$$

$\vec{J}_{imp} =$ Densidad de corrientes impresas

$\vec{J}_{cond} =$ Densidad de corrientes de conducción

$\vec{J}_{desp} = \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} =$ Densidad de corrientes de desplazamiento

Ley de Ohm

$\vec{J}_{cond} = \sigma\vec{E}$ Conductividad del medio: σ $\quad [\sigma] = \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$

Ecuaciones de Maxwell

Ecuaciones constitutivas del medio

$$\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}}$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\vec{E}}$$

Permitividad eléctrica del medio:

ε $\quad [\varepsilon] = F \cdot m^{-1}$

Permitividad relativa: $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}}$$

Permeabilidad magnética del medio:

μ $\quad [\mu] = H \cdot m^{-1}$

Permeabilidad relativa: $\mu_r = \dfrac{\mu}{\mu_0}$

Ecuaciones de Maxwell

Clases de medios

- **Homogéneo:** ε, μ, σ independientes de la posición
- **Lineal:** ε, μ, σ independientes de los campos
- **Isotrópico:** ε, μ, σ independientes de la orientación de los campos

$$\vec{E} \parallel \vec{D} \qquad \vec{B} \parallel \vec{H}$$

Condiciones de frontera

$$\boxed{\hat{n}_{12}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\rho_S} \qquad \boxed{D_{2n}-D_{1n}=\rho_S}$$

$$\boxed{\hat{n}_{12}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0} \qquad \boxed{B_{2n}-B_{1n}=0}$$

$$\boxed{\hat{n}_{12}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0} \qquad \boxed{\vec{E}_{2t}-\vec{E}_{1t}=0}$$

$$\boxed{\hat{n}_{12}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{J}_S}$$

Energía electromagnética

Densidad de energía eléctrica:

$$w_E=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

Energía eléctrica almacenada en un volumen V

$$W_E=\iiint_V\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\right)dV$$

Densidad de energía magnética:

$$w_M=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

Energía magnética almacenada en un volumen V

$$W_M=\iiint_V\left(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)dV$$

Teorema de Poynting

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}-\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Forma diferencial:

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}-\vec{E}\cdot\vec{J}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\right)-\vec{E}\cdot\vec{J}}$$

Teorema de Poynting

Forma integral:

$$-\oint\!\!\oint_S\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot\vec{dS}=\frac{\partial}{\partial t}\int\!\!\int\!\!\int_V\left(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)dV+\frac{\partial}{\partial t}\int\!\!\int\!\!\int_V\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\right)dV+\iiint_V\left(\vec{E}\cdot\vec{J}\right)dV$$

$$-\oint\!\!\oint_S\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot\vec{dS}=\frac{\partial}{\partial t}\int\!\!\int\!\!\int_V\left(\frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}\right|^2\right)dV+\frac{\partial}{\partial t}\int\!\!\int\!\!\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2\right)dV+\iiint_V\left(\sigma\left|\vec{E}\right|^2\right)dV$$

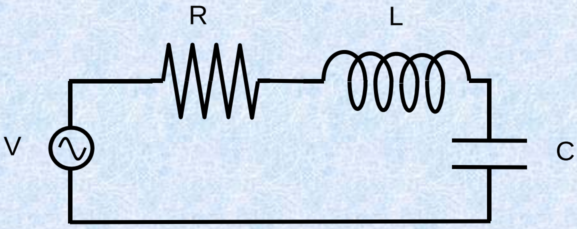
$$P_{in}=\frac{\partial W_M}{\partial t}+\frac{\partial W_E}{\partial t}+P_{ohm}$$

Teorema de Poynting

Equivalente circuital:

$$P_{in} = \frac{\partial W_M}{\partial t} + \frac{\partial W_E}{\partial t} + P_{ohm}$$

$$-\oint\!\!\oint_S \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) \cdot \vec{dS} = \frac{\partial}{\partial t} \int\!\!\int\!\!\int_V \left(\frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}\right|^2\right) dV + \frac{\partial}{\partial t} \int\!\!\int\!\!\int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2\right) dV + \iiint_V \left(\sigma\left|\vec{E}\right|^2\right) dV$$



$$P(t) = V(t) \cdot I(t) = \frac{L}{2}\frac{dI^2(t)}{dt} + \frac{C}{2}\frac{dV_C{}^2(t)}{dt} + \frac{V_R{}^2(t)}{R}$$

Variaciones temporales armónicas

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left[\vec{E}^c(\vec{r})e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left[\vec{H}^c(\vec{r})e^{j\omega t}\right]$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \text{Re}\left[\rho^c(\vec{r})e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left[\vec{D}^c(\vec{r})e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left[\vec{J}^c(\vec{r})e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left[\vec{B}^c(\vec{r})e^{j\omega t}\right]$$

8

Variaciones temporales armónicas

Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -\, j\omega\vec{B}(\vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + j\omega\vec{D}(\vec{r}) = \vec{J}_{imp}(\vec{r}) + \vec{J}_{cond}(\vec{r}) + j\omega\vec{D}(\vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}_{imp}(\vec{r}) + \sigma\vec{E}(\vec{r}) + j\omega\varepsilon\vec{E}(\vec{r}) = \vec{J}_{imp}(\vec{r}) + j\omega\varepsilon^{c}\vec{E}(\vec{r})$$

Ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) + j\omega\rho(\vec{r}) = 0$$

$$\varepsilon^{c} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

Variaciones temporales armónicas

Energía eléctrica

Densidad de energía eléctrica:

$$w_E(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\vec{D}(\vec{r}, t)\cdot\vec{E}(\vec{r}, t)$$

Energía eléctrica almacenada en un volumen V

$$W_E(t) = \iiint_V \left(\frac{1}{2}\vec{D}(\vec{r}, t)\cdot\vec{E}(\vec{r}, t)\right) dV$$

Promedio temporal:

$$\langle w_E \rangle_T = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}^{*}\right] = \frac{1}{4}\varepsilon\left|\vec{E}\right|^{2}$$

Promedio temporal:

$$\langle W_E \rangle_T = \iiint_V \left(\frac{1}{4}\varepsilon\left|\vec{E}\right|^{2}\right) dV$$

Variaciones temporales armónicas

Energía magnética

Densidad de energía magnética:

$$w_M(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\vec{B}(\vec{r},t)\cdot\vec{H}(\vec{r},t)$$

Energía magnética almacenada en un volumen V

$$W_M(t)=\iiint_V\left(\frac{1}{2}\vec{B}(\vec{r},t)\cdot\vec{H}(\vec{r},t)\right)dV$$

Promedio temporal:

$$\langle w_M\rangle_T=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}^*\right]=\frac{1}{4}\mu\left|\vec{H}\right|^2$$

Promedio temporal:

$$\langle W_M\rangle_T=\iiint_V\left(\frac{1}{4}\mu\left|\vec{H}\right|^2\right)dV$$

Variaciones temporales armónicas

Teorema de Poynting

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)=\vec{H}^*\cdot\nabla\times\vec{E}-\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}^*$$

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$$

$$\nabla\times\vec{H}^*=\sigma\vec{E}^*-j\omega\varepsilon\vec{E}^*$$

Forma diferencial:

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)=-j\omega\mu\left|\vec{H}\right|^2+j\omega\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2-\sigma\left|\vec{E}\right|^2$$

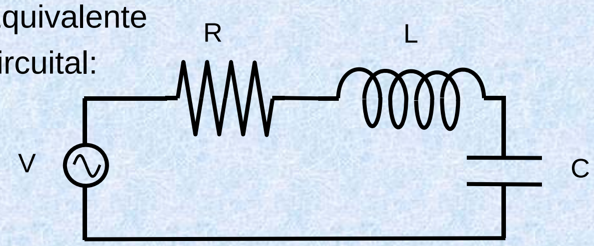
Variaciones temporales armónicas

Teorema de Poynting Forma integral:

$$-\oint\!\!\oint_S \frac{1}{2}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot\vec{dS} = 2j\omega\iiint_V\left(\frac{1}{4}\mu\left|\vec{H}\right|^2\right)dV - 2j\omega\iiint_V\left(\frac{1}{4}\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2\right)dV + \iiint_V\left(\frac{1}{2}\sigma\left|\vec{E}\right|^2\right)dV$$

$$\left\langle P_{in}\right\rangle_T = \frac{\partial\left\langle W_M\right\rangle_T}{\partial t} + \frac{\partial\left\langle W_E\right\rangle_T}{\partial t} + \left\langle P_{ohm}\right\rangle_T$$

Equivalente circuital:



$$V(t) = \mathrm{Re}\left[V\,e^{j\omega t}\right]$$

$$I(t) = \mathrm{Re}\left[I\,e^{j\omega t}\right]$$

$$\left\langle P\right\rangle_T = \frac{1}{2}V\cdot I^* = 2j\omega\frac{1}{4}L|I|^2 - 2j\omega\frac{1}{4}C|V|^2 + \frac{1}{2}\frac{|V_R|^2}{R}$$

11