GUÍAS DE ONDAS

INTRODUCCIÓN

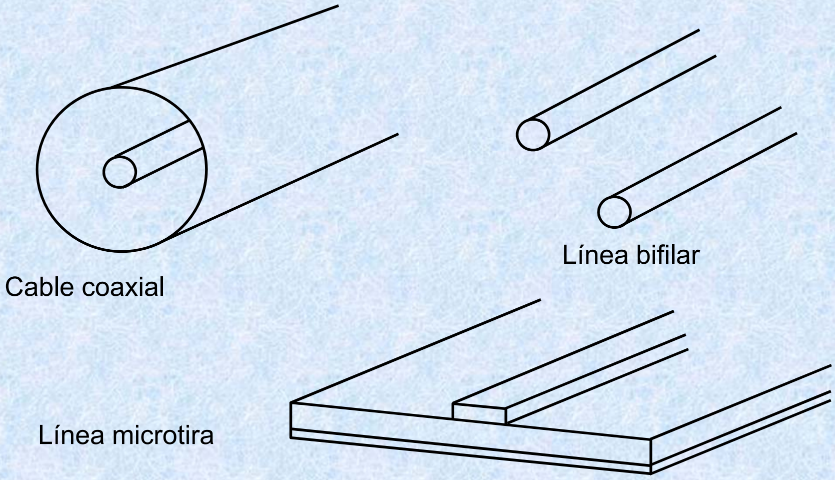
Introducción

TRANSMISIÓN DE SEÑAL:

- Espacio libre
  - Ondas planas TEM
  - Análisis sencillo
  - Grandes pérdidas
- Ondas Dirigidas
  - Ondas TEM, TE, TM
  - Análisis complejo
  - Menores pérdidas

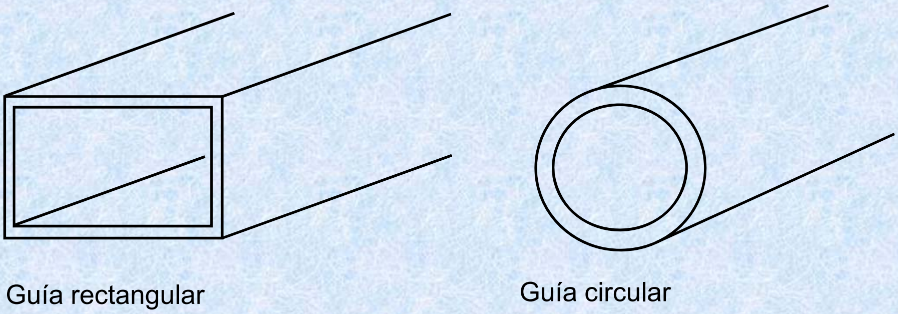
Introducción

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN



Introducción

GUÍAS DE ONDAS CONDUCTORAS



Introducción

- Líneas de Transmisión
  - Varios conductores
  - Simetría traslacional
  - Pérdidas altas (dieléctrico, radiación)
  - A veces, campos no confinados

- Guías de Ondas
  - Conductor único
  - Simetría traslacional
  - Pérdidas bajas
  - Campos confinados

Introducción

- Líneas de Transmisión
  - Análisis sencillo (teoría de circuitos)
  - Propagación de cualquier frecuencia, incluso dc
  - Modo fundamental TEM, también modos TE, TM

- Guías de Ondas
  - Análisis complicado (ecuaciones de Maxwell)
  - Propagación si $f > f_c$, **no** se propaga dc
  - Modos TE_{mn}, TM_{mn}, **no** TEM

Solución General

Se asume:

- Excitación temporal armonica

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}^F(x,y,z)\cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{H}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\vec{H}^F(x,y,z)\cdot e^{j\omega t}\right]$$

- Propagación a lo largo del eje z

$$\vec{E}^F(x,y,z) = \left[\vec{e}(x,y) + \hat{z}e_z(x,y)\right]\cdot e^{j\beta z}$$

$$\vec{H}^F(x,y,z) = \left[\vec{h}(x,y) + \hat{z}h_z(x,y)\right]\cdot e^{j\beta z}$$

Solución General

Utilizando las ecuaciones de Maxwell para medios sin fuentes

$$\nabla\times\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \qquad \nabla\times\vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x$$

$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \qquad -j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z$$

Solución General

Se pueden poner todas las componentes en función de E_z y H_z

$$H_x = \frac{j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)$$

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2}\left(-\beta\frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Solución General. Modo TEM

Modos TEM $E_z = 0;\ H_z = 0 \Rightarrow k_c = 0 \Rightarrow \beta = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \\ -j\beta H_x - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \\ -j\beta H_x = j\omega\varepsilon E_y \end{array}\right\} \Rightarrow \beta^2 E_y = \omega^2\mu\varepsilon E_y$$

La ecuación de Helmholtz para E_x

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)E_x = 0 \quad \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E_x = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)E_y = 0 \quad \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E_y = 0$$

Solución General . Modo TEM

Definiendo

$$\nabla_t^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \Rightarrow \nabla_t^2 \vec{e}\left(x,y\right) = 0$$

Similarmente $$\nabla_t^2 \vec{h}\left(x,y\right) = 0$$

Los campos transversales satisfacen la ecuación de Laplace.
Solución similar a la de estática

$$\vec{e}\left(x,y\right) = -\nabla_t \phi\left(x,y\right) \text{ donde } \quad \nabla_t \equiv \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\nabla_t \times \vec{e}\left(x,y\right) = -j\omega\mu h_z \hat{z} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon \nabla_t \cdot \vec{e} = 0 \Rightarrow \nabla_t^2 \phi(x,y) = 0$$

Solucción electroestática del potencial

Solución General . Modo TEM

El voltaje entre dos conductores

$$V_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \int_1^1 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

La corriente que circula por un conductor es

$$I = \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

Los modos TEM existen con la presencia de 2 o más conductores

$$Z_{\mathrm{TEM}} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta = \frac{-E_y}{Hx}$$

$$\vec{h}(x,y) = \frac{1}{Z_{\mathrm{TEM}}} \hat{z} \times \vec{e}\left(x,y\right)$$

En general

$$Z_{\mathrm{TEM}} \neq Z_0 = \frac{V}{I}$$

Solución General. Modo TE

Modos TE $E_z = 0;\ H_z \neq 0 \Rightarrow \beta \neq k$

$$H_x = \frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad E_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$H_y = \frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \qquad E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

La ecuación de Helmholtz para H_z

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) H_z = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) h_z = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

$$Z_{\mathrm{TE}} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{k\eta}{\beta}$$

Solución General. Modo TM

Modos TE $H_z = 0;\ E_z \neq 0 \Rightarrow \beta \neq k$

$$E_x = \frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$E_y = \frac{-j\beta}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \qquad H_y = \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

La ecuación de Helmholtz para E_z

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) E_z = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) e_z = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

$$Z_{\mathrm{TM}} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta\eta}{k}$$

Solución General. Atenuación

Dieléctrico con pérdidas $\varepsilon^c = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon_0\varepsilon_r(1 - j\tan\delta)$

$$j\beta \to \gamma = \alpha_d + j\beta = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r(1 - j\tan\delta)}$$

Usando

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \simeq a\left(1 + \frac{x^2}{2a^2}\right) = a + \frac{x^2}{2a} \quad \text{Para } x \ll a$$

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2 + jk^2\tan\delta} \simeq \underbrace{\sqrt{k_c^2 - k^2}}_{j\beta} + \frac{jk^2\tan\delta}{2\sqrt{k_c^2 - k^2}}$$

$$\gamma \simeq j\beta + \frac{k^2\tan\delta}{2\beta}$$

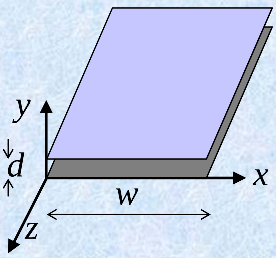
Modos TE y TM

$$\alpha_d = \frac{k^2\tan\delta}{2\beta}$$

Modos TEM

$$\alpha_d = \frac{k\tan\delta}{2}$$

Placas Paralelas



Modos TEM $\nabla_t^2\phi(x,y) = 0, \qquad 0 \le x \le w,\ 0 \le y \le d$

$$\phi(x,0) = 0,\ \ 0 \le x \le w,\ y = 0; \qquad \phi(x,d) = V_0,\ \ 0 \le x \le w,\ y = d$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

Solución general $\phi(x,y) = Ay + B$

Solución particular $\phi(x,y) = \dfrac{V_0}{d}y$

Placas Paralelas

Modos TEM

$$\vec{e}(x,y) = -\nabla_t \phi\left(x,y\right) = -\hat{y}\frac{V_0}{d}$$

$$\vec{E} = \vec{e}\, e^{-jkz} = -\hat{y}\frac{V_0}{d}e^{-jkz}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta}\hat{z}\times\vec{E} = \hat{x}\frac{V_0}{\eta\, d}e^{-jkz}$$

$$V = -\int_0^d \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_0^d E_y dy = V_0 e^{-jkz}$$

$$I = \int_0^w \vec{J}\cdot\hat{z}\, dx = \int_0^w \left(-\hat{y}\times\vec{H}\right)\cdot\hat{z}\, dx = \int_0^W H_x\, dx = \frac{wV_0}{\eta\, d}e^{-jkz}$$

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{\eta\, d}{w}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}$$

Placas Paralelas

Modos TM

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right)e_z(x,y) = 0$$

Solución general $e_z\left(x,y\right) = A\,\mathrm{sen}(k_c y) + B\cos(k_c y)$

Condiciones de Frontera $e_z\left(x,y\right) = 0,\quad \text{en } y = 0, y = d$

Solución particular $e_z\left(x,y\right) = A_n\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{d}y)$

$$k_c = \frac{n\,\pi}{d},\quad n = 0,1,2,\cdots \qquad \beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\,\pi}{d}\right)^2}$$

$$E_x = 0 \qquad H_x = \frac{j\omega\varepsilon d}{n\pi}A_n\cos\frac{n\,\pi y}{d}e^{-j\beta z}$$

$$E_y = \frac{-j\beta d}{n\pi}A_n\cos\frac{n\,\pi y}{d}e^{-j\beta z} \qquad H_y = 0$$

$$E_z = A_n\,\mathrm{sen}\frac{n\,\pi\, y}{d}e^{-j\beta z} \qquad H_z = 0$$

Placas Paralelas

Pérdidas debidas al conductor

Potencia transmitida en un medio con pérdidas:

$$\mathrm{P_T} = \mathrm{P_{T(z=0)}}\, e^{-2\alpha_c z}$$

Potencia disipada por unidad de longitud:

$$\mathrm{P_{lc}} = \mathrm{P_{T(z=0)}} - \mathrm{P_{T(z=1)}} = \mathrm{P_{T(z=0)}} - \mathrm{P_{T(z=0)}} e^{-2\alpha_c}$$

Si $\alpha_c << 1$ $\Longrightarrow$ $e^{-2\alpha_c} \approx 1 - 2\alpha_c$

$$\mathrm{P_{lc}} = \mathrm{P_{T(z=0)}} - \mathrm{P_{T(z=0)}}(1 - 2\alpha_c)$$

$$\alpha_c = \frac{\mathrm{P_{lc}}}{2\mathrm{P_{T(z=0)}}}$$

Placas Paralelas

Modos TM

$$f_c = \frac{n}{2d\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad Z_{\mathrm{TM}} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta\eta}{k}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \qquad \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} \qquad \lambda_c = \frac{2d}{n} \qquad R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

$$P_0 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^w \int_0^d \vec{E}\times\vec{H}^* \cdot \hat{z}\, dy\, dx = \begin{cases} \dfrac{w\,\mathrm{Re}(\beta)\,\omega\varepsilon d}{4k_c^2}|A_n|^2 & n>0 \\[2ex] \dfrac{w\,\mathrm{Re}(\beta)\,\omega\varepsilon d}{2k_c^2}|A_n|^2 & n=0 \end{cases}$$

$$P_l = 2\frac{R_s}{2}\int_0^w \left|\vec{J}_S\right|^2 dx = \frac{\omega^2\varepsilon^2 R_S w}{k_c^2}|A_n|^2$$

$$\alpha_c = \frac{2kR_S}{\beta\eta d}\ \frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}} \quad n>0$$

$$\alpha_c = \frac{R_S}{\eta d}\ \frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}} \quad n=0$$

Placas Paralelas

Modos TE

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)h_z(x,y)=0$$

Solución general $h_z\left(x,y\right)=A\,\text{sen}(k_c y)+B\cos(k_c y)$

Condiciones de Frontera $E_x\left(x,y,z\right)=0,\quad \text{en } y=0, y=d$

Solución particular $E_x\left(x,y,z\right)=\dfrac{j\omega\mu}{k_c}B_n\,\text{sen}(\dfrac{n\pi}{d}y)$

$$k_c=\frac{n\pi}{d},\quad n=0,1,2,\cdots \qquad \beta=\sqrt{k^2-k_c^2}=\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}$$

$$E_x=\frac{j\omega\mu}{k_c}B_n\,\text{sen}\frac{n\pi y}{d}e^{-j\beta z} \qquad H_x=0$$

$$E_y=0 \qquad H_y=\frac{j\beta}{k_c}B_n\,\text{sen}\frac{n\pi y}{d}e^{-j\beta z}$$

$$E_z=0 \qquad H_z=B_n\cos\frac{n\pi y}{d}e^{-j\beta z}$$

Placas Paralelas

Modos TE

$$f_c=\frac{n}{2d\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad Z_{\text{TE}}=\frac{E_x}{H_y}=\frac{\omega\mu}{\beta}=\frac{k\eta}{\beta}$$

$$v_f=\frac{\omega}{\beta} \qquad \lambda_g=\frac{2\pi}{\beta} \qquad \lambda_c=\frac{2d}{n} \qquad R_S=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

$$P_0=\frac{1}{2}\text{Re}\int_0^w\int_0^d\vec{E}\times\vec{H}^*\cdot\hat{z}\,dy\,dx=\frac{w\omega\mu d}{4k_c^2}\left|B_n\right|^2\text{Re}\left(\beta\right),\ n>0$$

$$P_l=2\frac{R_s}{2}\int_0^w\left|\vec{J}_S\right|^2dx=R_S\left|B_n\right|^2w$$

$$\alpha_c=\frac{2k_c^2R_S}{\omega\mu\beta d}=\frac{2k_c^2R_S}{k\beta\eta d}\ \frac{\text{Np}}{\text{m}} \quad n>0$$

Placas Paralelas

Modos TE y TM como suma de Ondas Planas

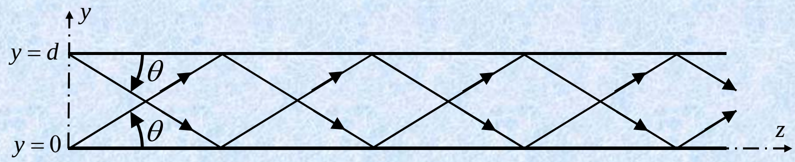
Ejemplo: Modo TM$_1$ $\beta_1 = \sqrt{k^2 - (\pi/d)^2}$

$$E_z(x,y,z) = A_1 \,\mathrm{sen}\,\frac{\pi y}{d}\, e^{-j\beta_1 z}$$

$$E_z(x,y,z) = \frac{A_1}{2j}\left(e^{-j[-\pi y/d + \beta_1 z]} - e^{-j[\pi y/d + \beta_1 z]}\right)$$

$$\vec{d}_1 = -\pi\hat{y}/d + \beta_1\hat{z} \quad \vec{d}_2 = \pi\hat{y}/d + \beta_1\hat{z}$$

$$k\,\mathrm{sen}\,\theta = \pi/d\,; \quad k\cos\theta = \beta_1; \Rightarrow \quad k^2 = (\pi/d)^2 + \beta_1^2$$



Velocidades

Velocidad de la luz en el medio es la velocidad a la que se propaga una onda plana en dicho medio

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Velocidad de fase es la velocidad a la que viaja un punto con fase constante

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

Para ondas TEM la velocidad de fase y la de la luz coinciden. No es cierto para otros tipos de ondas

Si la velocidad de fase y la atenuación son constantes no hay distorsión. En caso contrario si.

Hay dispersión cuando la velocidad de fase es función de la frecuencia.

12

Velocidades

En medios bajamente dispersivos o con señales de banda estrecha se puede definir la velocidad de grupo

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta}$$

La velocidad de grupo es la velocidad a la que la señal se propaga

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

A la salida de un sistema lineal e invariante

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

En un sistema sin distorsión

$$H(\omega) = \frac{1}{A} e^{-j\omega t_0} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{A} x(t - t_0)$$

Velocidades

Una señal de banda estrecha se puede poner como

$$s(t) = x(t) e^{j\omega_0 t} \qquad \text{donde } \omega_0 \gg \omega_m \quad S(\omega) = X(\omega - \omega_0)$$

La señal a la salida es

$$Y(\omega) = H(\omega) S(\omega) = \frac{1}{A} X(\omega - \omega_0) e^{-j\beta z}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} X(\omega - \omega_0) e^{j(\omega t - \beta z)} d\omega$$

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \left.\frac{d\beta}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \cdots$$

$$\beta(\omega) \simeq \beta_0 + \beta_0^{'} (\omega - \omega_0) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{A} x(t - \beta_0^{'} z) e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)}$$

$$v_g = \frac{1}{\beta_0^{'}} = \left.\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right)^{-1}\right|_{\omega=\omega_0}$$