Chapter 4 - Line or surface integrals.

Path/line integrals

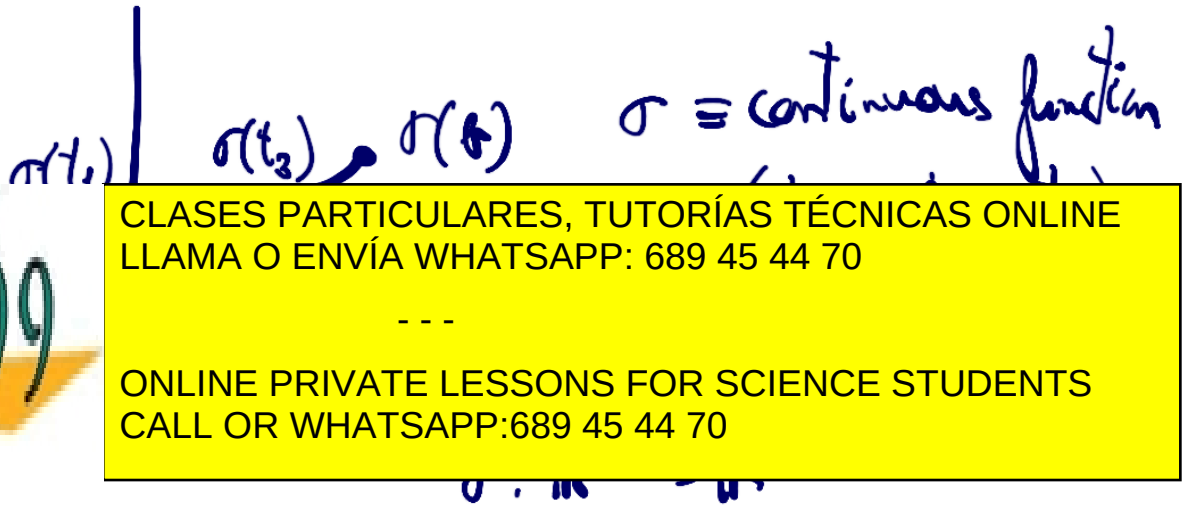
Generalisation of 1D integrals

Necessary elements:

Path or trajectory

$$\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$t \longrightarrow \sigma(t) \in \mathbb{R}^N$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Image of σ. $\equiv$ curve.

$$\text{Im}\,\sigma = \sigma([a,b])$$

Different ways of representing σ:

- Most common and useful (in this chapter)

  Parametric equations

Example: $x+y=3$: Implicit equation

$t \equiv$ parameter $\begin{cases} x=t \\ y=3-t \end{cases}$: Parametric equation

$y=3-x$: Explicit equation

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

In general if σ is a trajectory in $\mathbb{R}^3$

$$\sigma(t) = \left(\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t) \right)$$

for any position $\mathbf{r} = (x, y, z)$ we find

$$\left.\begin{aligned} x &= \sigma_1(t) \\ y &= \sigma_2(t) \\ z &= \sigma_3(t) \end{aligned}\right\} \text{: Parametric equations. for the path } \sigma$$

$$\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

but $N = 2, 3$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Definition

$\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ is a continuous path

whose curve is given by

$$\operatorname{Im}\sigma = \sigma([a,b])$$

We say that σ is smooth if it is differentiable

$\sigma \in C^1$ or $\sigma'(t) = (\sigma_1'(t), \dots, \sigma_n'(t))$ cont.

Then, we say that σ is a trajectory.

Definition

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Remark

In $\mathbb{R}^3$ we can assume the ratio of change in every direction, between two points.

$$t, t_0 \in [a, b]$$

so that

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_1(t) - \sigma_1(t_0)}{t - t_0} &\sim \sigma_1'(t_0) \\ \frac{\sigma_2(t) - \sigma_2(t_0)}{t - t_0} &\sim \sigma_2'(t_0) \\ \frac{\sigma_3(t) - \sigma_3(t_0)}{t - t_0} &\sim \sigma_3'(t_0) \end{aligned}\right\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

At the limit

$$\lambda = \frac{\sigma_1(t) - \sigma_1(t_0)}{\sigma_1'(t_0)} = \frac{\sigma_2(t) - \sigma_2(t_0)}{\sigma_2'(t_0)} = \frac{\sigma_3(t) - \sigma_3(t_0)}{\sigma_3'(t_0)}$$

$$\Downarrow$$

$$S(\lambda) = \underbrace{\sigma(t_0)}_{\in \mathbb{R}^n} + \lambda \sigma'(t_0) \quad \Big| \text{ Parametric equation}$$

$$\sigma(t_0) = \left(\sigma_1(t_0), \sigma_2(t_0), \sigma_3(t_0)\right)$$

$$\sigma_i(t_0) \in \mathbb{R}.$$

- Remember.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

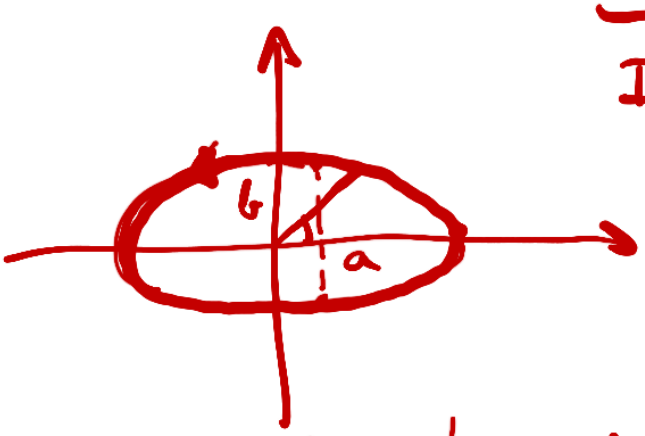
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Example: Ellipse $\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Implicit equation



To find a trajectory for that curve:

Parametrise the curve.

a) $\left.\begin{aligned} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{aligned}\right\} : \sigma$, $\theta \equiv$ parameter.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\sigma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\theta \longrightarrow \sigma(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$$

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Divide the ellipse into two different branches.

use explicit formula

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \qquad y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

If $\sigma_1 \begin{cases} x = t \\ y = b\sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \end{cases}$, $\sigma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -b\sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \end{cases}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Example: $x+y+z=1$

Parametrise the plane:

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= s \\ z &= 1-t-s \end{aligned}\right\} \text{ Parametric equations.}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{P} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1} + s\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2} \quad \text{Vector equation}$$

$X \in \mathbb{R}^3$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Curves

$\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ trajectory

$\mathrm{Im}\,\sigma = \sigma([a,b])$ curve.

Definition

We say that:

a) $\sigma([a,b])$ is a simple curve if

σ is one-to-one,

$\sigma(t_0) \neq \sigma(t_1)$ for any $t_0, t_1 \in [a,b]$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

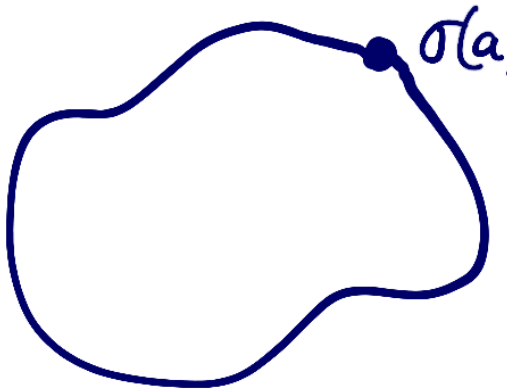
- - -

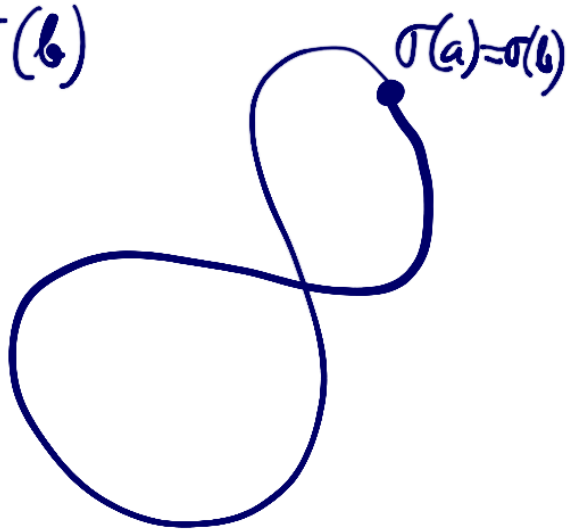
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

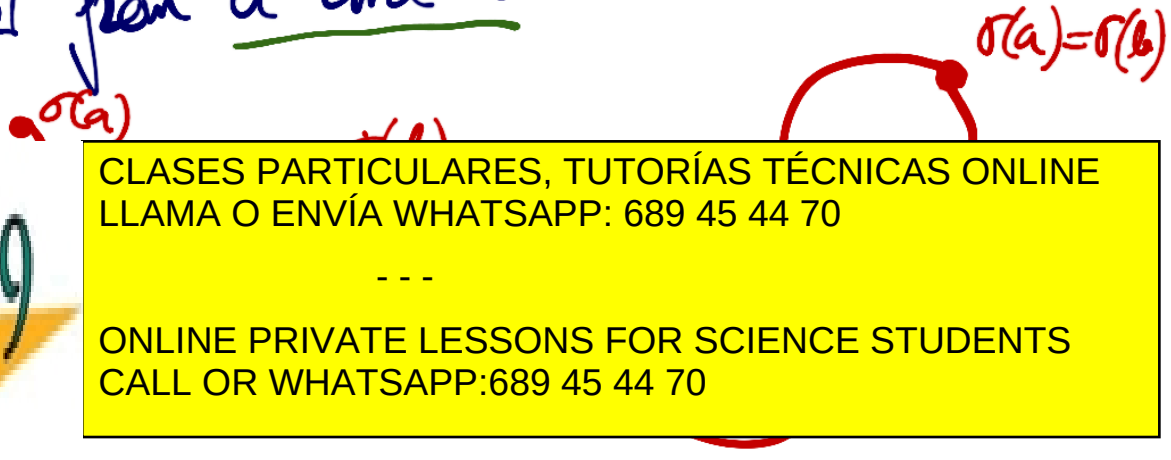
b) $\sigma([a,b])$ is a closed curve if

$$\sigma(a) = \sigma(b)$$





c) $\sigma([a.b])$ is a simple and closed curve if it is closed and one-to-one of any t except from a and b



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

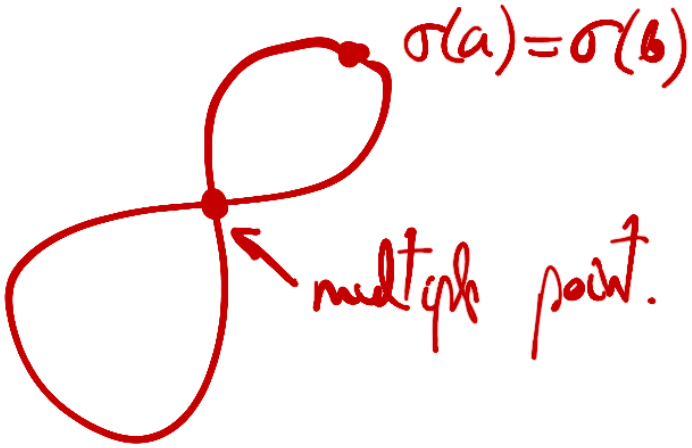
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

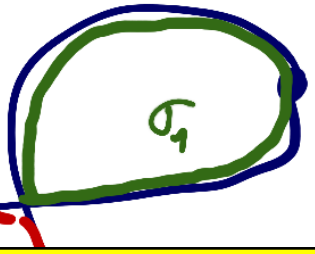
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Remark

If $\sigma(t_0) = \sigma(t_1)$ for any $t_0, t_1 \in (a, b)$ then we have a multiple point



Very important concept in integration along trajectories !!!



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Definition

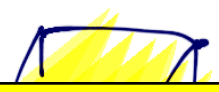
$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ scalar functions (temperature, density)

$F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ vector functions / fields (velocity, force, etc)

Remark

Change the perspective:

We don't focus on integrals giving volumes or areas below a function in a region



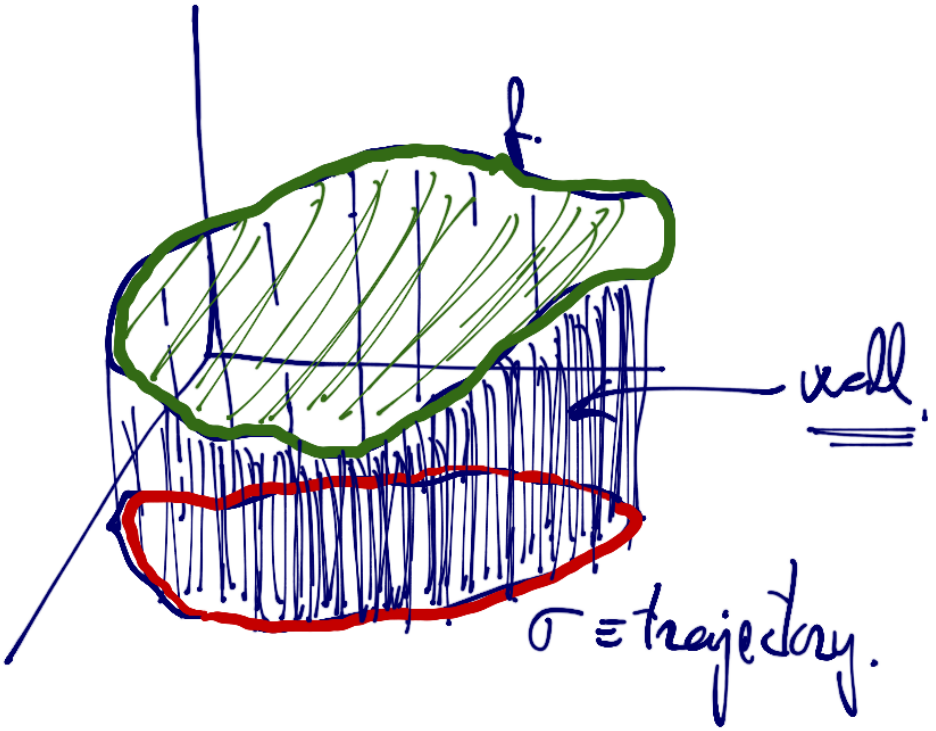
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.



We compute how that function behaves along that trajectory, we create a wall and compute the area of that wall.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Path integrals for scalar functions.

$\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ trajectory.

$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ scalar function.

The idea is to compute

$\int_\sigma f \equiv$ average of the density along that trajectory

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Definition

$\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ a trajectory of class C^1 (stepwise C^1)

$t \to \sigma(t)$

and $f : \sigma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\sigma([a,b])$: curve or image of σ

we map every point on the curve by f.

Then, the integral of f along the trajectory σ is given by

$$I = \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Notation

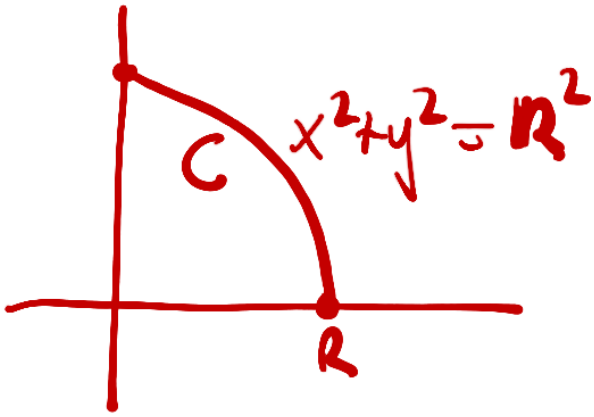
$$\int_\sigma f \quad \text{or} \quad \int_\sigma f(x_1, \dots x_n)\, ds$$

$ds \equiv$ differential movement along the path.

Problem 1 i)

4.1

$f(x,y) = 2xy^2$ along $x^2+y^2 = R^2$ in the first quadrant.



$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = R^2,\ x,y \geq 0\}$

$$\int_\sigma = \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\|\, dt$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

First, we parametrise the curve.

$$\sigma: \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$\sigma: [0, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \to \sigma(t) = (R\cos t, R\sin t)$$

$$\sigma'(t) = R(-\sin t, \cos t)$$

$$\|\sigma'(t)\| = R\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = R$$

$$\int_{\sigma(t)} = 2 \underbrace{R\cos t}_{x} \underbrace{R^2 \sin^2 t}_{y^2} = 2R^3 \cos t \sin^2 t$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

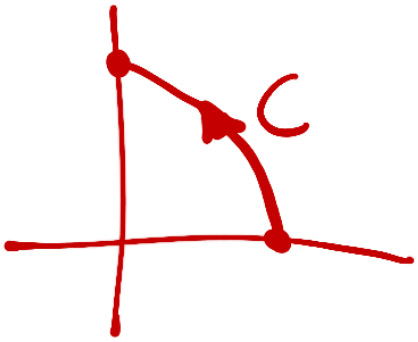
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

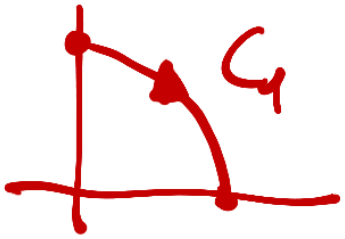
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$= 2R^4 \left[\frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2R^4}{3}$$

$t \in [0, \pi/2]$ $\quad t=0$ start point, $t=\frac{\pi}{2}$ end point



If $t=0$ end point, $t=\frac{\pi}{2}$ start point



$$\int_{C_1} f = -\int_C f$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Definition - Length of a curve.

It will be a line integral along a curve

with $f(x_1 \dots x_N) = 1$

$$L = \int_\sigma 1 = \int_a^b \|\sigma'(t)\| \, dt$$

Area of a region D

$$A = \iint_D dx\,dy$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Definition - Mean value of f along a trajectory

$$\frac{1}{L(\sigma)} \int_{\sigma} f = \frac{1}{L(\sigma)} \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt$$

$\|\sigma'(t)\| \, dt$: differential of arc

$$\boxed{ds = \|\sigma'(t)\| \, dt}$$ modulus

$$S = x\,i + y\,j + z\,k$$

$$dx = \sigma_1'(t)\,dt$$
$$dy = \sigma_2'(t)\,dt$$
$$dz = \sigma_3'(t)\,dt$$

} on the direction of the tangent vector.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Geometric interpretation

Assume $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ trajectory

$C \equiv \sigma([a,b])$

Now take a partition of $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma(a) = \sigma(t_0), \sigma(t_1), \ldots \sigma(t_k) = \sigma(b)$$

Cartagena99

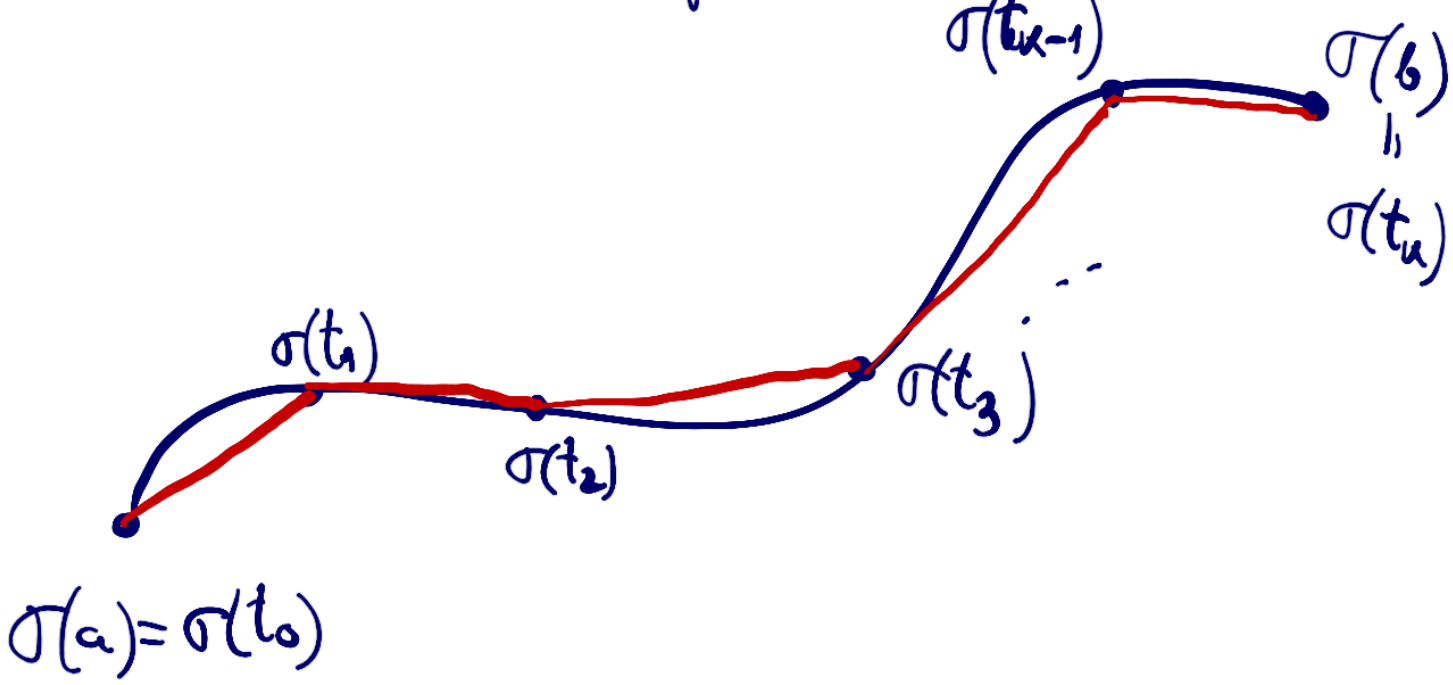
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

We would like to compute the length of C.



We add those segments.

$$\sum_{i=1}^{k} \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{k} \|\sigma'(\xi_i)\| (t_i - t_{i-1})$$

Riemann sums for $\|\sigma'(t)\|$

↑ using the mean value TB.

$\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$

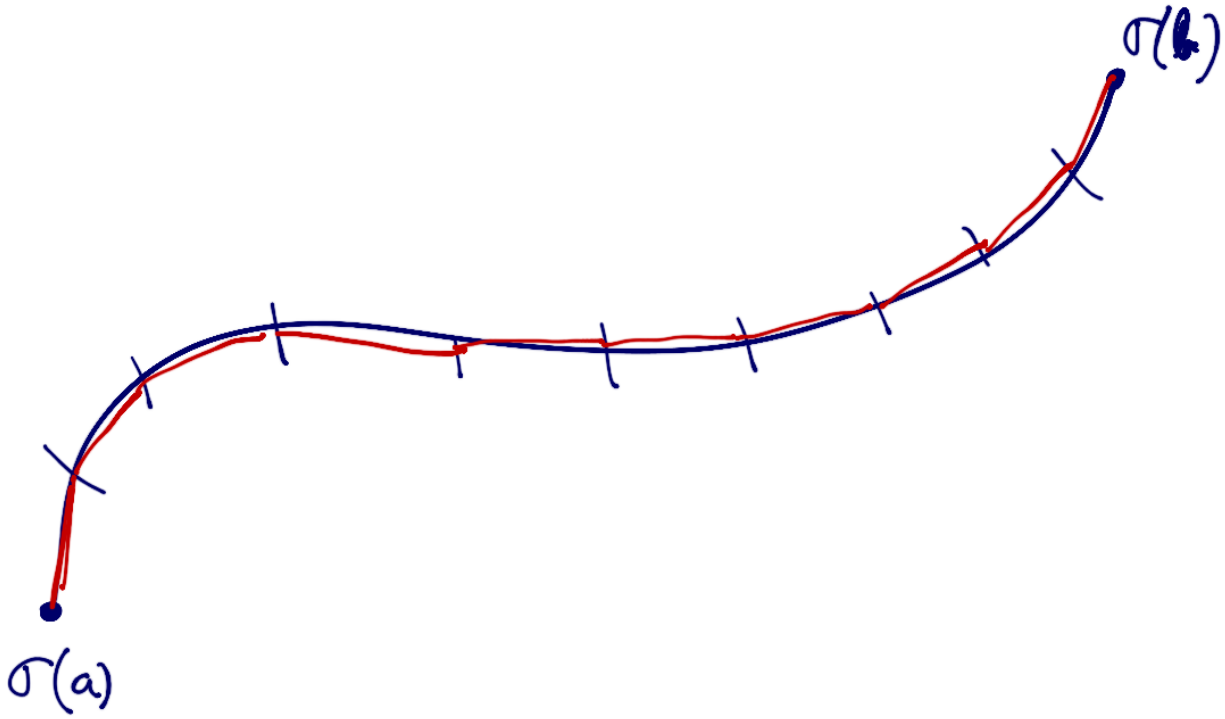
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.



Passing to the limit

$$\lim_{\Delta(t_{i-1},t_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \|\sigma'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\,dt = L(\sigma)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

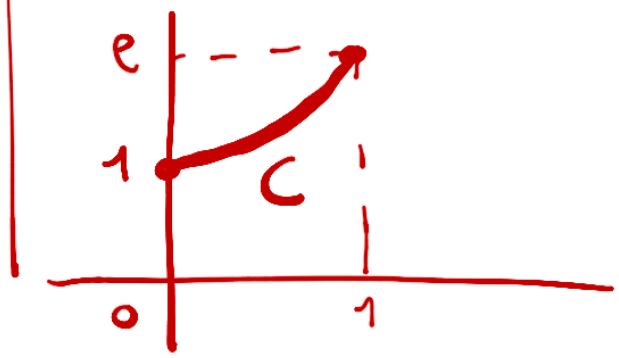
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Example: Find the length of the curve

$f(t) = e^t$ in $[0,1]$



First we parametrise the curve:

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= e^t \end{aligned}\right\} : \sigma, \quad \sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \to (t, e^t)$$

$$\text{length of } C = \int_0^1 \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2t}}\, dt$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

We choose

$e^t = x$, $e^t dt = dx \Rightarrow dt = \frac{dx}{e^t} = \frac{dx}{x}$

$$\int_0^1 \sqrt{1+e^{2t}}\, dt = \int_1^e \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx = \int_1^e \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, \frac{dx}{x}$$

Now $\boxed{\sqrt{1+x^2} = s} \Rightarrow x^2 = s^2 - 1$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = ds \Rightarrow dx = \frac{s}{x}\, ds$$

$$\sqrt{1+x^2} \cdot \frac{dx}{x} = s \cdot \frac{s}{x^2}\, ds = \frac{s^2}{x^2} = \frac{s^2}{s^2-1}\, ds$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{s^2}{s^2-1}\, ds$$

$\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \log \frac{s+1}{s-1} \Big]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} = \cdots =$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.