

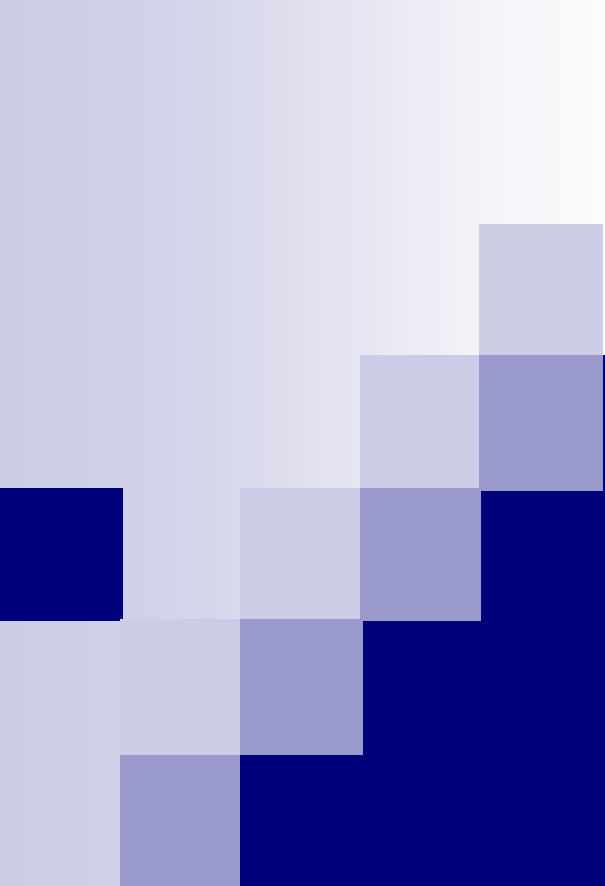
# Tema 3: Algoritmos de Búsqueda

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



## 3.1 Algoritmos básicos de búsqueda

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Resultados conocidos

## ■ Búsqueda lineal

□  $W_{BLin}(N) = N$  con OB cdc

□  $A_{BLin}^e(N) = \sum_{i=1}^N n_{BLin}(k = T[i]) p(k == T[i]) \sim \frac{S_N}{C_N}$

## ■ Búsqueda binaria

□  $W_{BBin}(N) = \lceil \lg(N) \rceil = \lg(N) + O(1) = A_{BBin}^f(N)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Coste medio de BBin con éxito.

- Veamos un ejemplo:

$$T=[1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7] \quad N=7=2^3-1$$

$$A_{BBin}^e(N) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 n_{BBin}(k = T[i]) = \frac{1}{7} (1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3)$$

4
2
6
1
3
5
7

$$\Rightarrow A_{BBin}^e(N) = \frac{1}{7} (1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4) = \frac{1}{7} (1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2)$$

- Para  $N=2^k-1$  se tiene

**Obs:**  $N=2^k-1 \Rightarrow k \approx \log(N)$

$$A_{BBin}^e(N) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^k i 2^{i-1} = \frac{1}{N+1} [k 2^k - 2^k + 1] \Rightarrow A_{BBin}^e(N) = \frac{1}{N+1} [N \lg(N) - N + 1] \Rightarrow$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Árbol de decisión para algoritmos de búsqueda por CDC: Definición

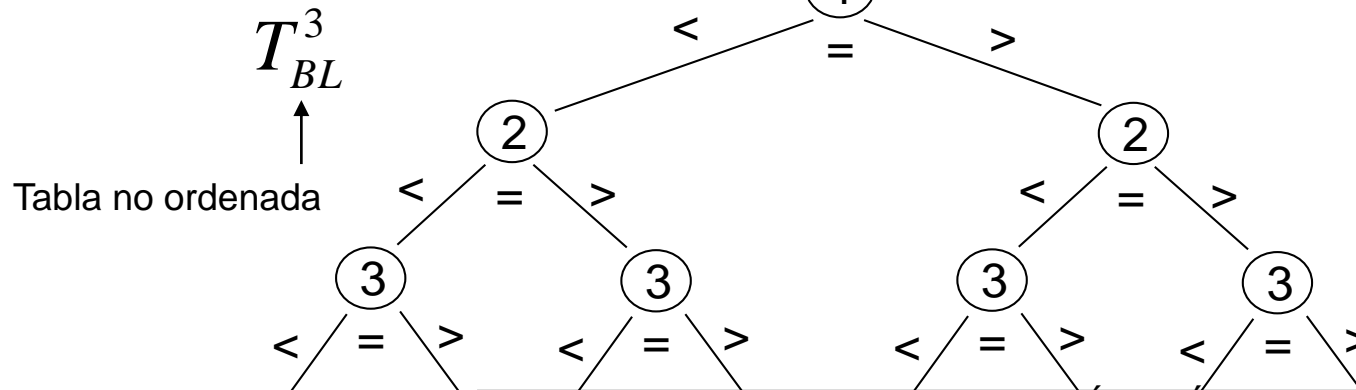
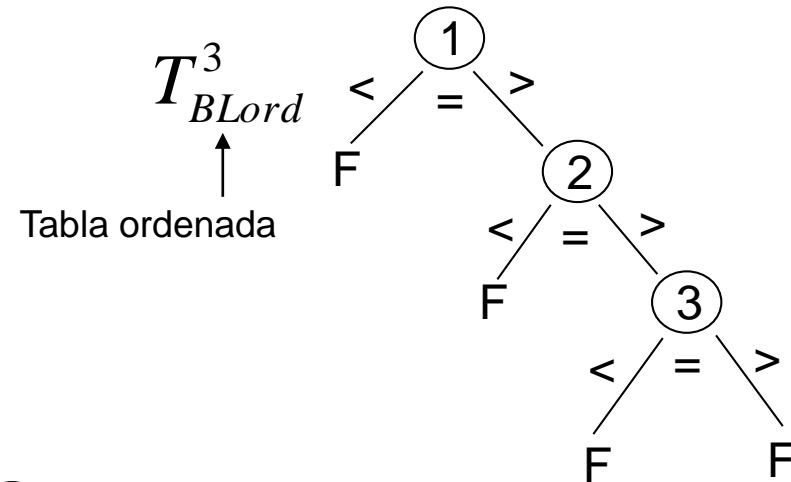
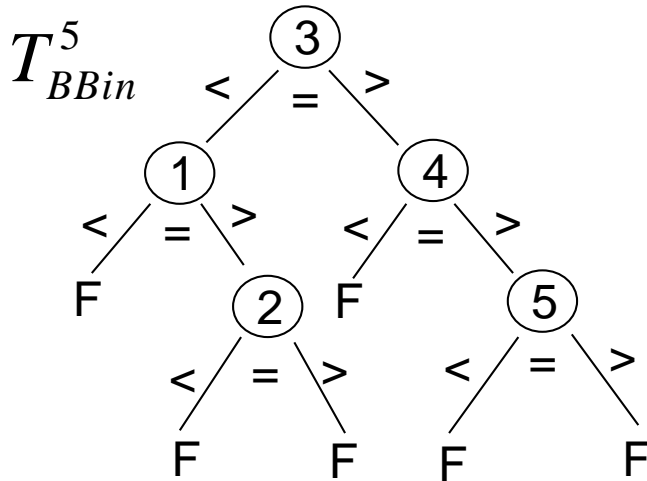
- Si **A** es un algoritmo de búsqueda por comparación de clave y **N** es un tamaño de tabla, se puede construir su **árbol de decisión**  $T_A^N$  para  $\sigma \in \Sigma_N$  tal que cumple las siguientes 5 condiciones:
  1. Contiene nodos de la forma **i** que indica la cdc entre el elemento i-ésimo de la tabla y una clave genérica **k**.
  2. Si **k** coincide con el elemento i-ésimo ( $T[i]==k$ ) entonces la búsqueda de la clave **k** termina en el modo **i**
  3. El subárbol izquierdo del nodo **i** en  $T_A^N$  contiene el trabajo (cdcs) que realiza el algoritmo **A** si  $k < T[i]$ .
  4. El subárbol derecho del nodo **i** en  $T_A^N$  contiene el trabajo (cdcs) que realiza el algoritmo **A** si  $k > T[i]$ .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Árbol de decisión: Ejemplos



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99


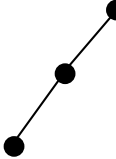
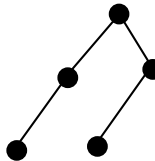
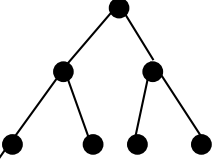
$W_{\text{prof}}(N) \geq \text{prof}_{\text{min}}(N)$

Profundidad mínima de un

árbol con al menos N nodos internos

# Árbol de decisión: Cotas inf. Caso Peor

## ■ Estimamos $\text{prof}_{\min}(N)$

N	T	$\text{Prof}_{\min}(N)$
1		1
2		2
3		2
4		3

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Cotas inferiores en búsqueda por cdc

- Tenemos que

$$W_A(N) \geq \text{prof}_{\min}(N) = \lfloor \lg(N) \rfloor + 1 \Rightarrow$$

$$W_A(N) = \Omega(\lg(N)) \quad \forall A \in B \text{ con}$$

$B = \{A: \text{algoritmo de búsqueda por cdc}\}$

- BBin es **óptimo** para el caso **peor**.

- Se puede demostrar también

$$A_A(N) = \Omega(\lg(N)) \quad \forall A \in B$$

- BBin es **óptimo** para el caso **medio**.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# ¿Ya hemos acabado?

- **Observación:** la búsqueda no es una operación aislada
- Los elementos no sólo se buscan sino que también se **insertan** o se **borran**
- No sólo importa cómo se busca sino también dónde se busca
- Contexto: TAD **Diccionario**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# En esta sección hemos ...

- Recordado los costes peor y medio de búsqueda lineal y binaria
- Aprendido el concepto de árbol de decisión en búsqueda por cdcs
- Aprendido a construir árboles de decisión en búsqueda por cdcs
- Visto que la búsqueda binaria es óptima en los casos peor y medio dentro de los



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 3.2 Búsqueda sobre diccionarios

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# TAD Diccionario

- **Diccionario:** conjunto ordenado de datos con las primitivas.
  - pos Buscar(clave **k**, dicc **D**)
    - Devuelve la posición de la clave **k** en el diccionario **D** o un código de error **ERR** si **k** no está en **D**.
  - status Insertar (clave **k**, dicc **D**)
    - Inserta la clave **k** en el diccionario **D** y devuelve **OK** o **ERR** si **k** no se pudo incorporar a **D**.
  - void Borrar (clave **k**, dicc **D**)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# EdDs para Diccionarios I

- ¿Qué EdD es la más adecuada para un diccionario?
- Opción 1: Tabla ordenada ( $|D|=N$ )
  - **Buscar:** Usamos BBin  $\Rightarrow n_{\text{Buscar}}(k,D)=O(\log(N)) \Rightarrow$  óptimo.
  - **Insertar:** Hay que mantener la tabla ordenada  $\Rightarrow$  la inserción es costosa
  - Ejemplo:

Insertar 26

			24	25	27	29	
--	--	--	----	----	----	----	--

Hay que desplazar a la derecha estos elementos

Cartagena99

CLASES PARTICULÁRES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

■ Por tanto  $n_{\text{Insertar}}(k,D)=\Theta(N)$ : malo!!

# EdDs para Diccionarios II

- Opción 2: **Árbol binario de búsqueda** (ABdB)
- **Definición:** Un **ABdB** es un árbol binario **T** que para todo nodo  $T' \in T$  se cumple:

$$\text{Info}(T'') < \text{Info}(T') < \text{Info}(T''')$$

para cualquier nodo  $T''$  a la izq de  $T'$  y  $T'''$  a la derecha de  $T'$

- Es decir, **todos los nodos a la izquierda** de  $T'$  tienen un valor **menor** que  $\text{info}(T')$  y **todos los nodos a la derecha** de  $T'$  tienen un valor **mayor** que  $\text{info}(T')$

Ejemlo:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

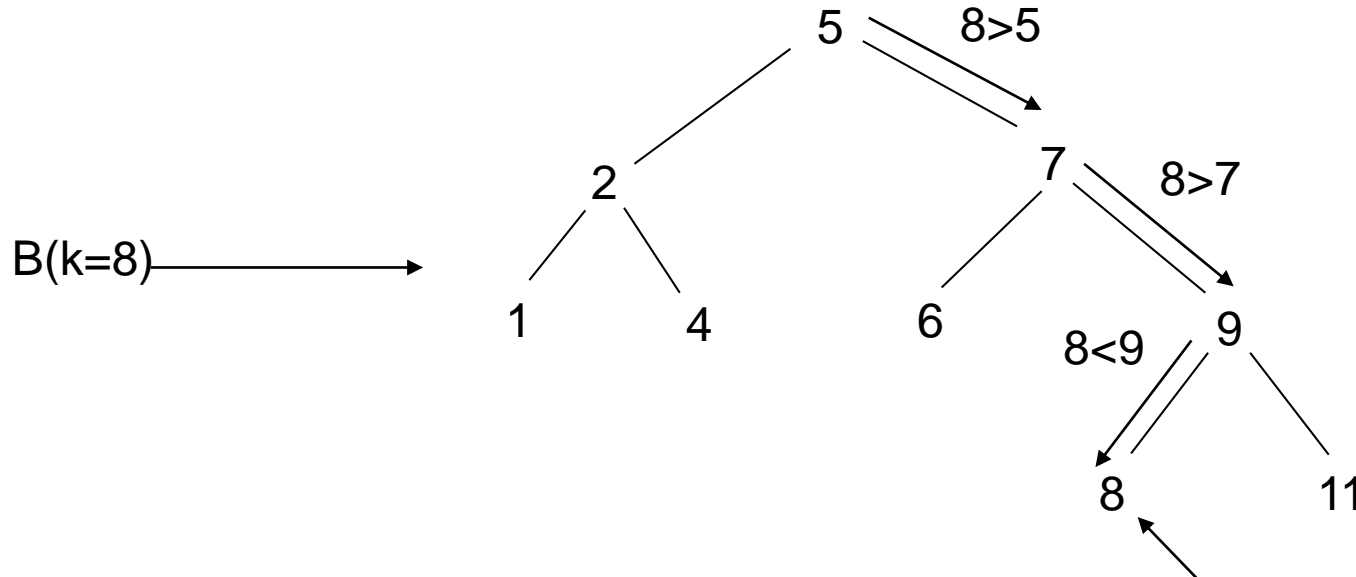
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Buscar sobre ABdBs I

## ■ Ejemplo



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Buscar sobre ABdBs II

## ■ Pseudocódigo:

```
AB Buscar (clave k, AB T)  
  si T==NULL : return NULL;  
  si info(T)==k : return T;  
  si k<info(T) :  
    return Buscar(k,izq(T));  
  si k>info(T) :  
    return Buscar(k,der(T));
```

## ■ Observación:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

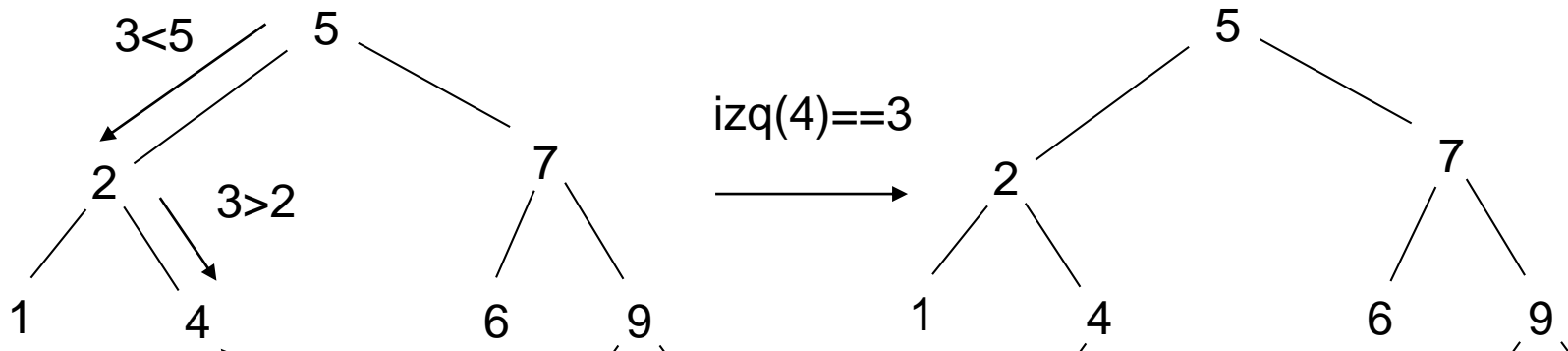


# Insertar en ABDBs I

## ■ Ejemplo

$I(k=3)$

BuscarUltimo



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ultimo,  $3 < 4$  y  $izq(4) == \text{NULL}$

# Insertar en ABDBs II

## ■ Pseudocódigo

### **status Insertar (clave k, AB T)**

```
T'=BuscarUltimo(k,T);
T''=GetNodo();
si T''==NULL : return ERR;
info(T'')=k;
si k<info(T') :
    izq(T')=T''
else :
    der(T')=T'';
return OK;
```

### **AB BuscarUltimo(clave k, AB T)**

```
si k == info(T): return NULL;
si (k<info(T) y izq(T) ==NULL) o
   (k>info(T) y der(T) ==NULL):
    return T;
si k<info(T) y izq(T) !=NULL :
    return BuscarUltimo(k,izq(T));
si k>info(T) y der(T) !=NULL :
    return BuscarUltimo(k,der(T));
```



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Borrar en ABdBs

## ■ Pseudocódigo:

```
void Borrar (clave k, AB T)
```

```
  T'=Buscar(k,T);
```

```
  si T'!=NULL :
```

```
    EliminaryReajustar(T',T);
```

## ■ Por tanto:

$$n_{\text{Borrar}}(k,T) = n_{\text{Buscar}}(k,T) + n_{\text{EyR}}(T',T)$$

En **EliminaryReajustar** hay tres posibles

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

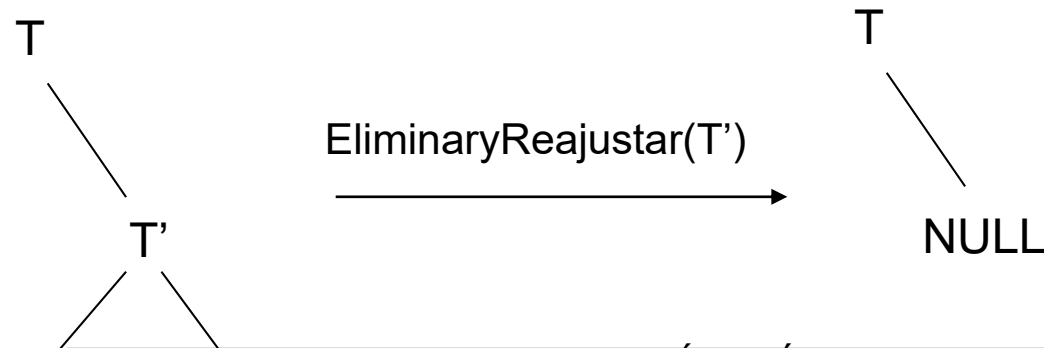
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Eliminar y Reajustar I

## ■ Caso 1: El nodo a eliminar **no tiene hijos**

- se libera el nodo  $T'$  ( $\text{free}(T')$ ), y
- el puntero del padre de  $T'$  que apuntaba a  $T'$  se reasigna a NULL.

■ Coste EliminaryReajustar =  $O(1)$



Cartagena99

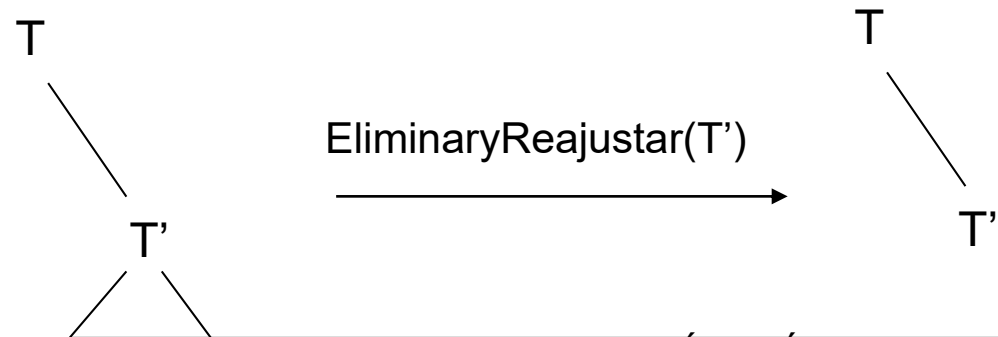
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Eliminar y Reajustar II

- Caso 2: El nodo a eliminar tiene **sólo un hijo**
  - el puntero del padre de T' que apuntaba a T' se hace apuntar al único hijo de T' y
  - se libera T'
- Coste EliminaryReajustar =  $O(1)$



Cartagena99

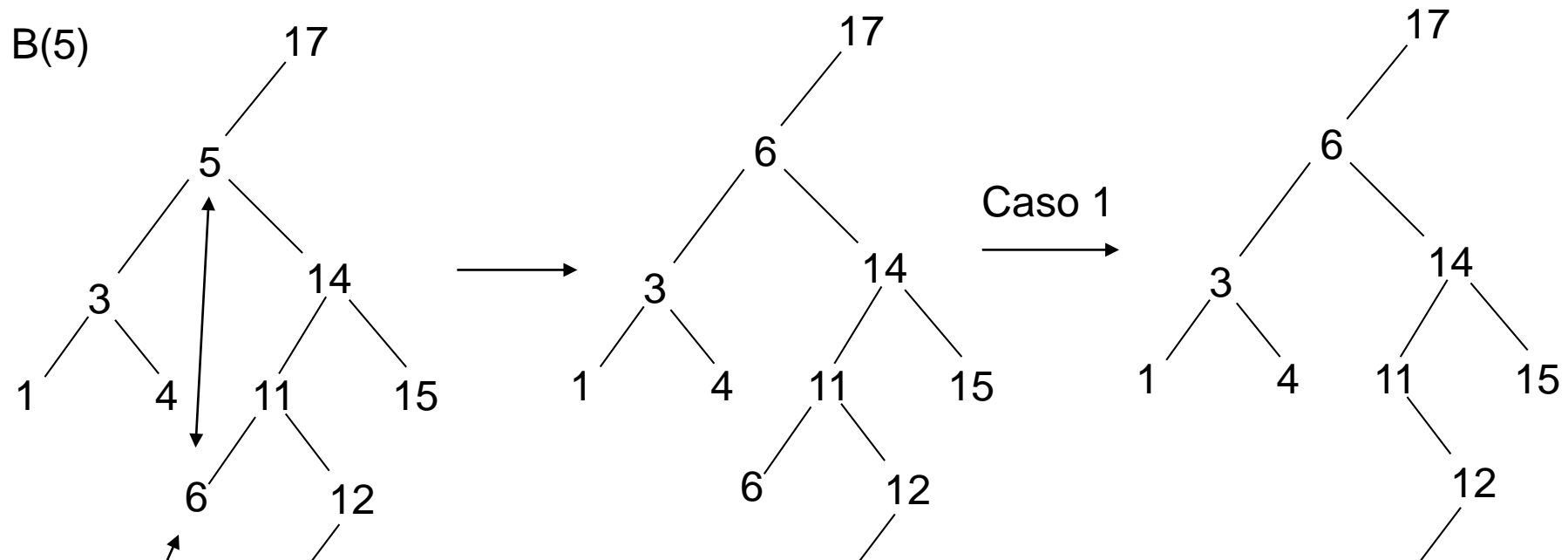
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Eliminar y Reajustar III

## ■ Caso 3: El nodo a eliminar tiene **dos hijos**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

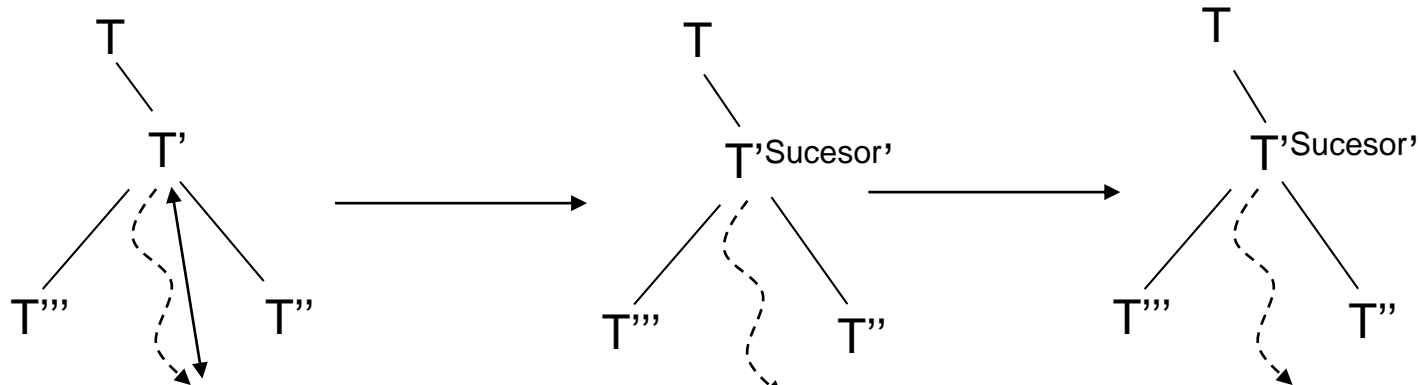
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sucesor

# Eliminar y Reajustar IV

- Cuando el nodo a eliminar tiene **dos hijos**
  - T' se sustituye por el nodo que contiene al **sucesor** (el elemento siguiente en la tabla ordenada), y
  - se elimina el nodo T' según el caso 1 o 2.
- $\text{Coste EliminaryReajustar} \leq \text{prof}(T)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Búsqueda del Sucesor

## ■ Pseudocódigo

```
AB BuscarSucesor(AB T')  
  T''=der(T');  
  mientras izq(T'')!=NULL :  
    T''=izq(T'');  
  return T'' ;
```

- **Obs:** Si  $k'$  es el sucesor en un ABdB de  $k$ , entonces **izq( $k'$ ) $\neq$ NULL**:
  - Si  $izq(k')=k''$  se tendría que  $k''<k'$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



# Eficacia de Primitivas sobre ABdB

- $n_{EyR}(T', T) = n_{\text{BuscarSucesor}} + n_{\text{ReajustarPunteros}} =$   
 $= O(\text{prof}(T)) + O(1) = O(\text{prof}(T))$
- Por tanto  
 $n_{\text{Borrar}}(k, T) = \underbrace{O(\text{prof}(T))}_{\text{Buscar}} + \underbrace{O(\text{prof}(T))}_{\text{EyR}} = O(\text{prof}(T))$
- ABdB es eficaz siempre que  $\text{prof}(T) = \Theta(\lg(N))$
- Pero sobre todos los árboles  $W_{\text{Buscar}}(N) = N$ :  
**¡¡malo!!**

1  
2

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

N

# Coste medio de búsqueda en ABdBs I

- $A_{\text{Buscar}}^e(N)$  = coste medio de **(1)** la búsqueda de todos los elementos **(2)** para todos los  $T_\sigma$

$$\begin{aligned}
 A_{\text{Buscar}}^e(N) &= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} A_{\text{Buscar}}^e(T_\sigma) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_{\text{Buscar}}(\sigma(i), T_\sigma) \\
 &= \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [prof(\sigma(i)) + 1] = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \left[ 1 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N prof(\sigma(i)) \right] \\
 &= 1 + \frac{1}{N} \times \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \sum_{i=1}^N prof(\sigma(i)) = 1 + \frac{1}{N} \left( \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} n_{\text{Crear}}(T_\sigma) \right)
 \end{aligned}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

IV

# Coste medio de búsqueda en ABdBs II

## ■ Vemos a un pseudocódigo **alternativo** para Crear

AB Crear (tabla  $\sigma$ )

$T = \text{IniAB}(\sigma);$

$\text{InsAB}(\sigma(1), T);$

$\text{Repartir}(\sigma, \sigma_i, \sigma_d);$

$T_i = \text{Crear}(\sigma_i);$

$T_d = \text{Crear}(\sigma_d);$

$\text{izq}(T) = T_i;$

$\text{der}(T) = T_d;$

return  $T;$

**Caso similar a QS:**

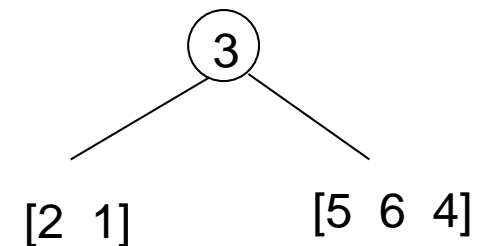
$$n_C(\sigma) = N - 1 + n_C(\sigma_i) + n_C(\sigma_d)$$



$$A_{\text{Crear}}(N) = 2N \log(N) + O(N)$$

$\sigma = [3 \ 5 \ 2 \ 6 \ 4 \ 1]$

Crear



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Resumen de primitivas sobre ABdBs

- Si B es un algoritmo general de Búsqueda por cdc

$$W_B(N) = \Omega(\lg(N))$$

- Si la EdD es un ABdB las primitivas son eficaces **en promedio**
- Si aseguramos que para todo  $\sigma \in \Sigma_N$  se tiene un ABdB tal que  $\text{prof}(T_\sigma) = \Theta(\lg(N))$  tendríamos que



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# En esta sección hemos ...

- Introducido el concepto de diccionario y sus primitivas
- Estudiado su implementación sobre ABdBs
- Comprobado que su coste viene determinado por la profundidad del ABdB
- Comprobado que dicha implementación es óptima en el caso medio

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Herramientas y técnicas a trabajar

- La construcción y uso de Árboles Binarios de Búsqueda
- Eliminación de nodos en ABdBs
- Problemas a resolver (al menos): los recomendados de la sección 11



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 3.3 Árboles AVL

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

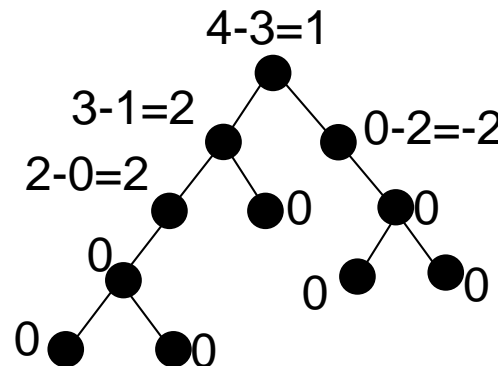
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Árboles AVL (Adelson-Velskii-Landis)

- **Definición:** El factor de equilibrio de un nodo T en un ABdB se define

$$FE(T) = \text{prof}(T_i) - \text{prof}(T_d) = \text{alt}(T_i) - \text{alt}(T_d)$$

- **Ejemplo:**



- **Definición:** Un AVL T es un ABdB tal que

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$FE(T) \in \{-1, 0, 1\}$

Cartagena99




# Construcción de AVLs

- Para construir un AVL se procede en 2 pasos.
  - Paso 1: Se realiza la inserción **normal** de un nodo en un ABdB
  - Paso 2: Si es necesario se corrigen desequilibrios y una vez corregidos, se vuelve al paso 1

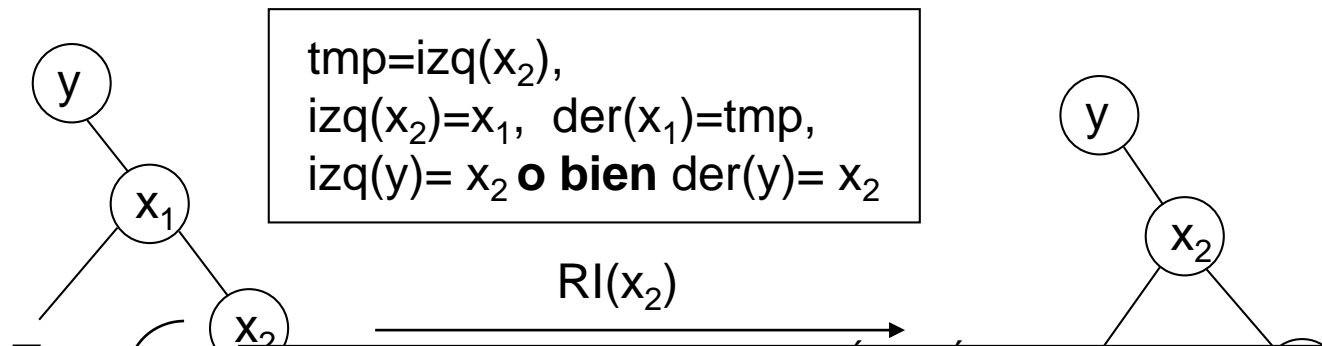
**Ejemplo:**  $T=[1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 15 \ 14 \ 13 \ 12 \ 11 \ 10 \ 9 \ 8]$

Cartagena99


  
 CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70  
 ---  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Construcción de AVLs

- La operación que acabamos de hacer se denomina **Rotación a la Izquierda en el -1**, en este caso en el elemento 2.
- En realidad la rotación a la izquierda en el -1 corresponde a la siguiente reasignación de punteros



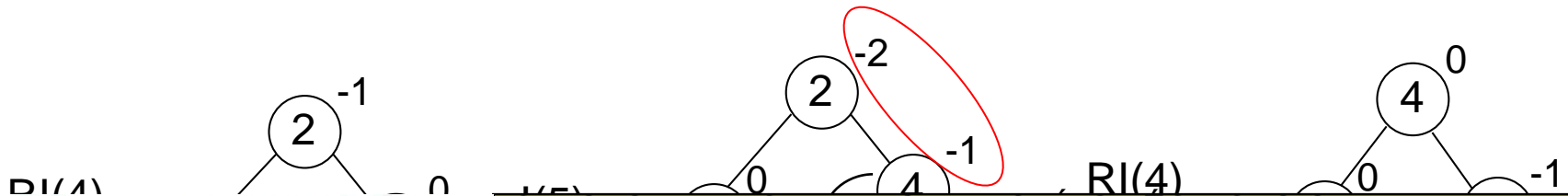
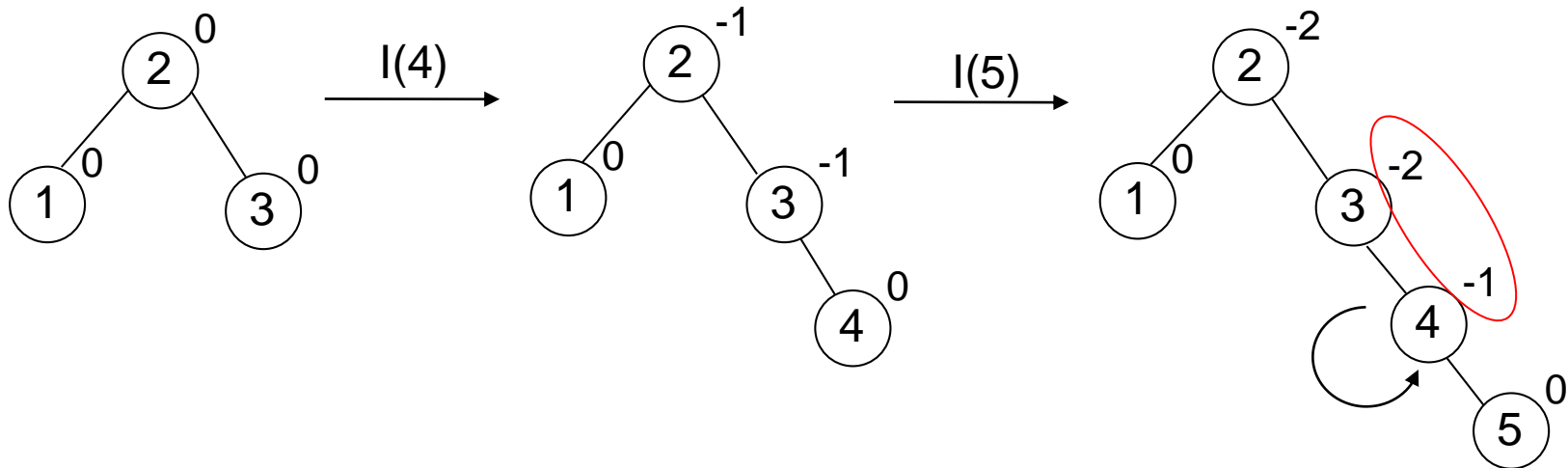
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

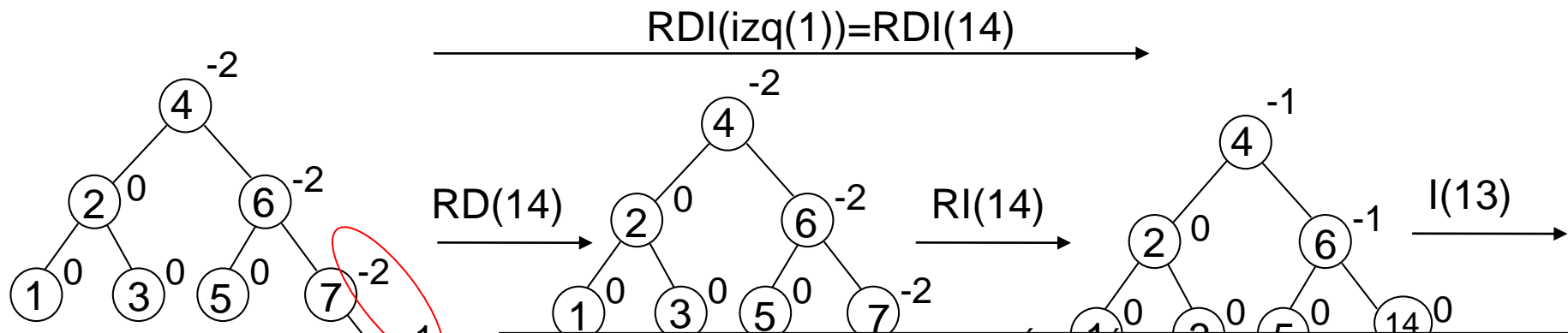
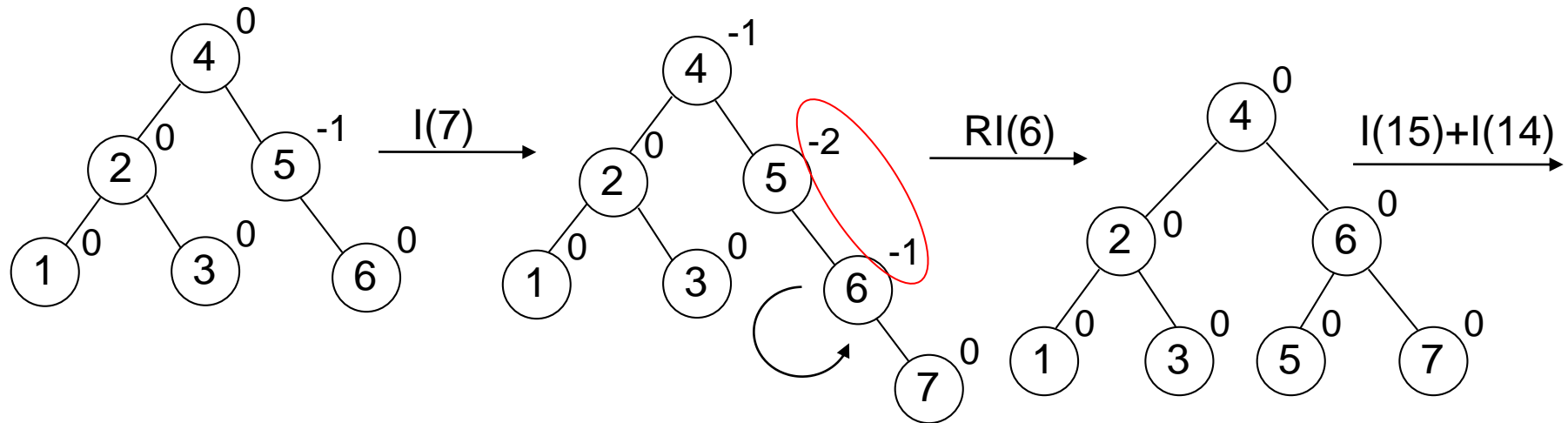
# Construcción de AVLs

## ■ Seguimos el proceso



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

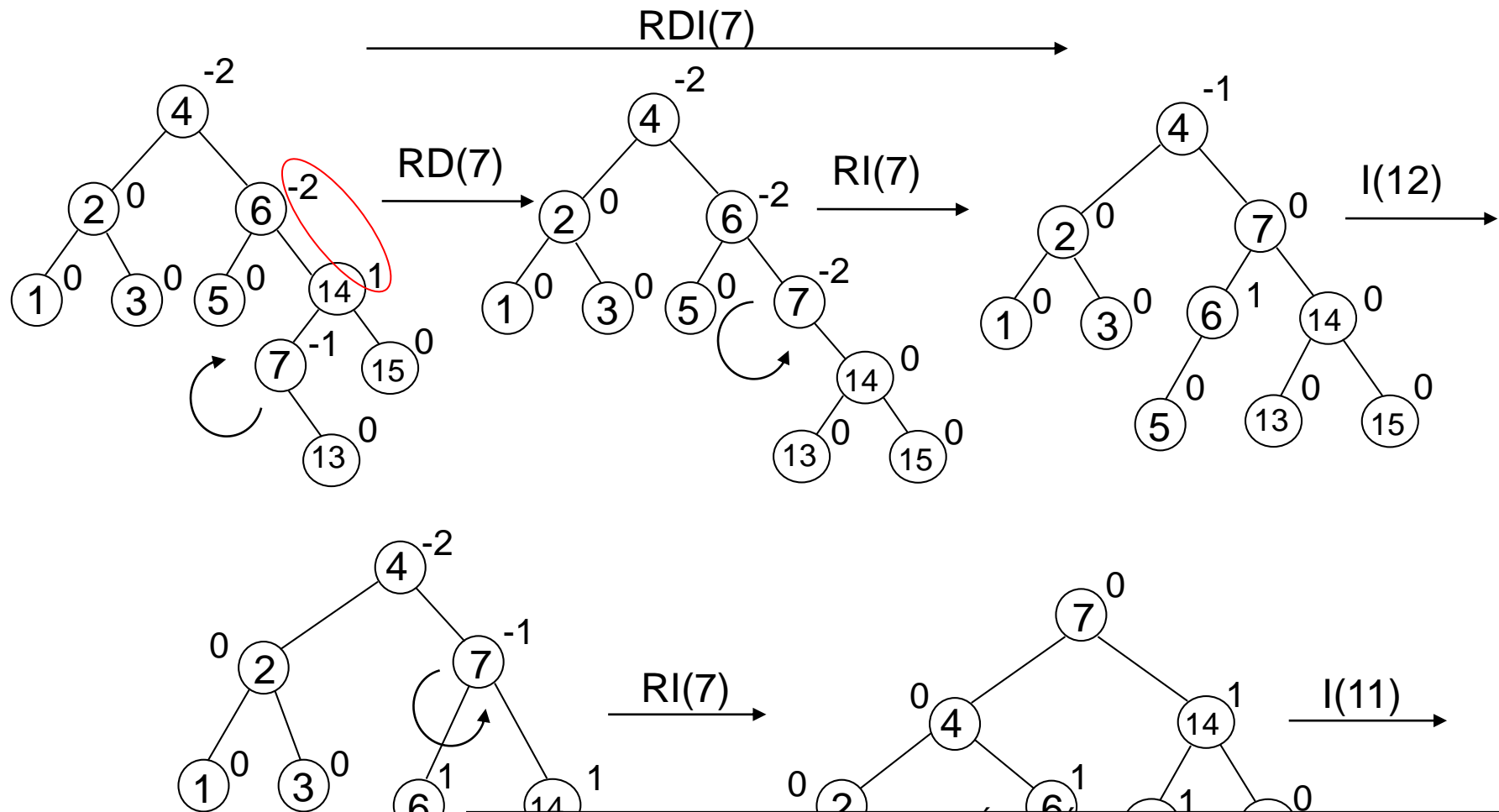
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

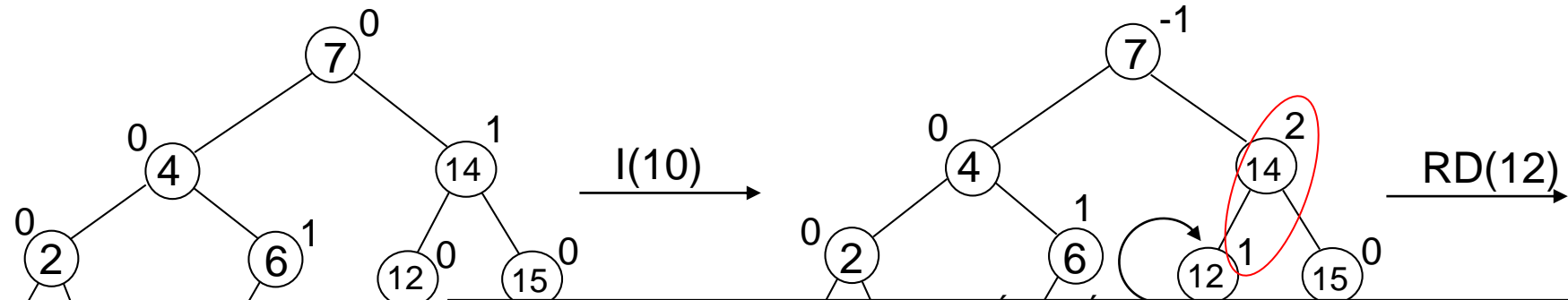
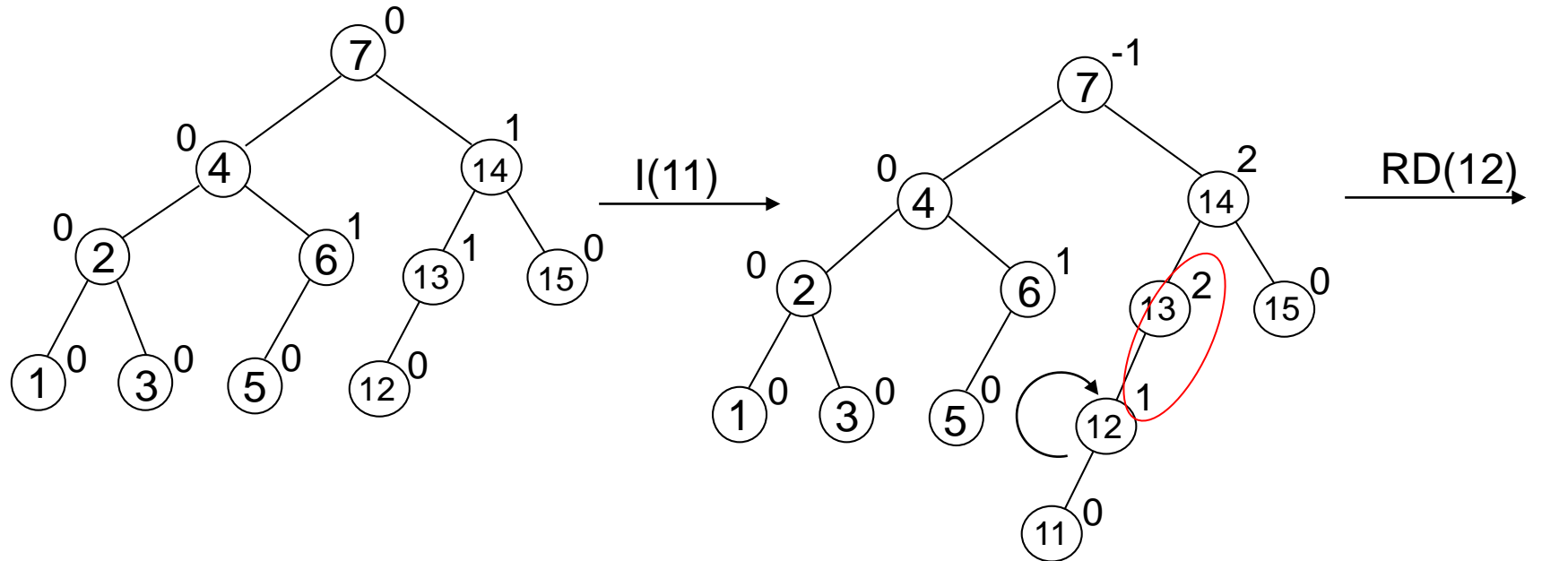


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

12

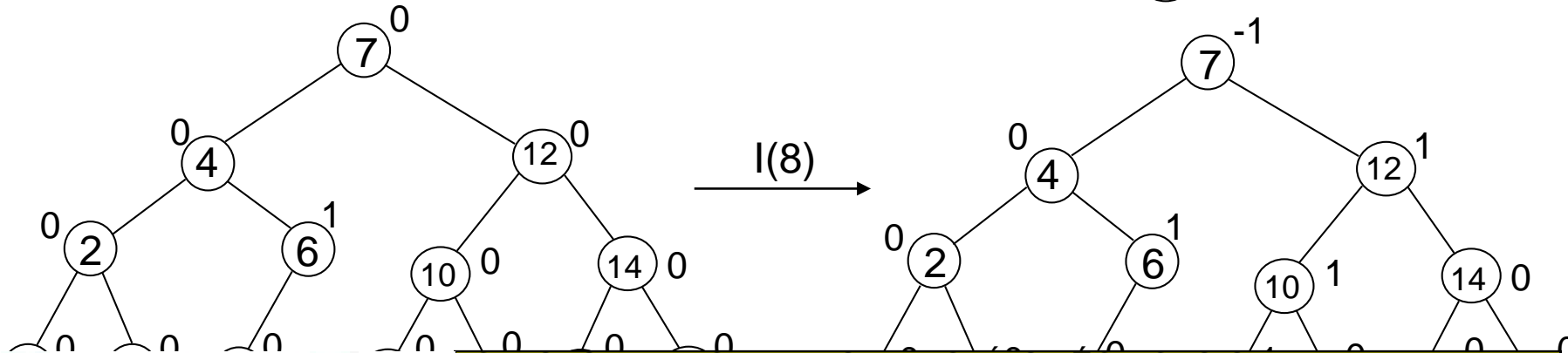
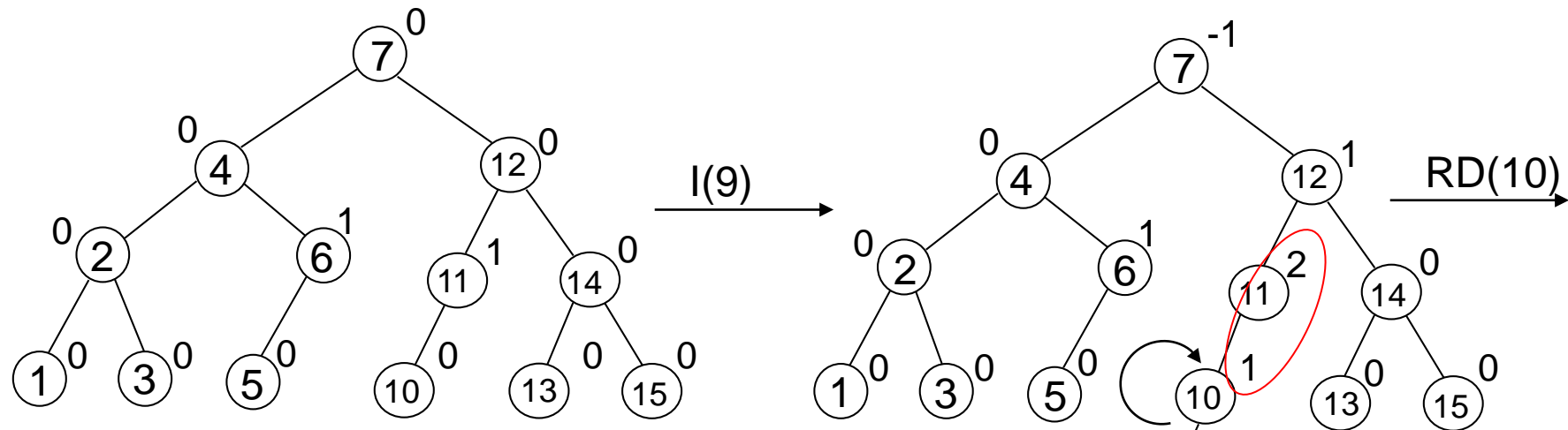


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

**Hemos construido el AVL**

# Resumen de rotaciones

Tipo de desequilibrio	Rotación
$(-2, -1)$	Rot Izquierda en -1 (hijo izq de -1 pasa a hijo der de -2)
$(2, 1)$	Rot Derecha en 1 (hijo der de 1 pasa a hijo izq de 2)
$(-2, 1)$	Rot Derecha Izquierda en izquierda de 1 $\text{RotIzq(izq(1))} + \text{RotDer(izq(1))}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

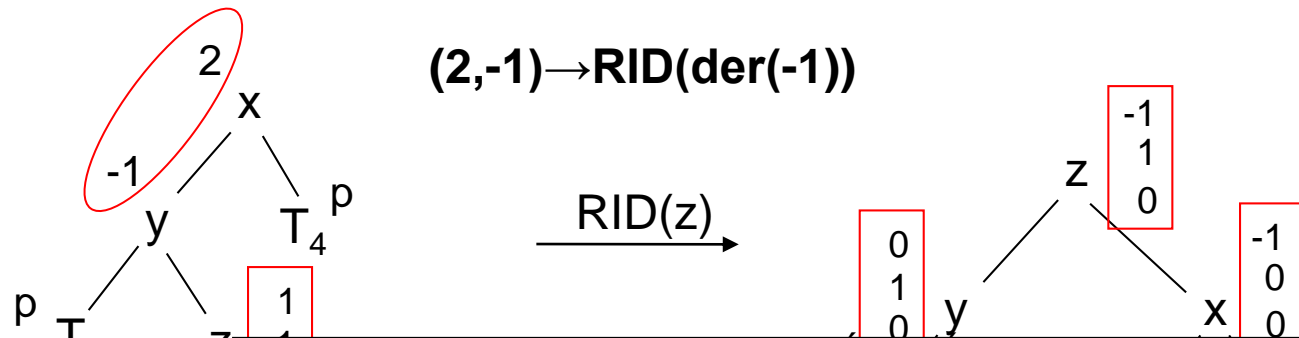
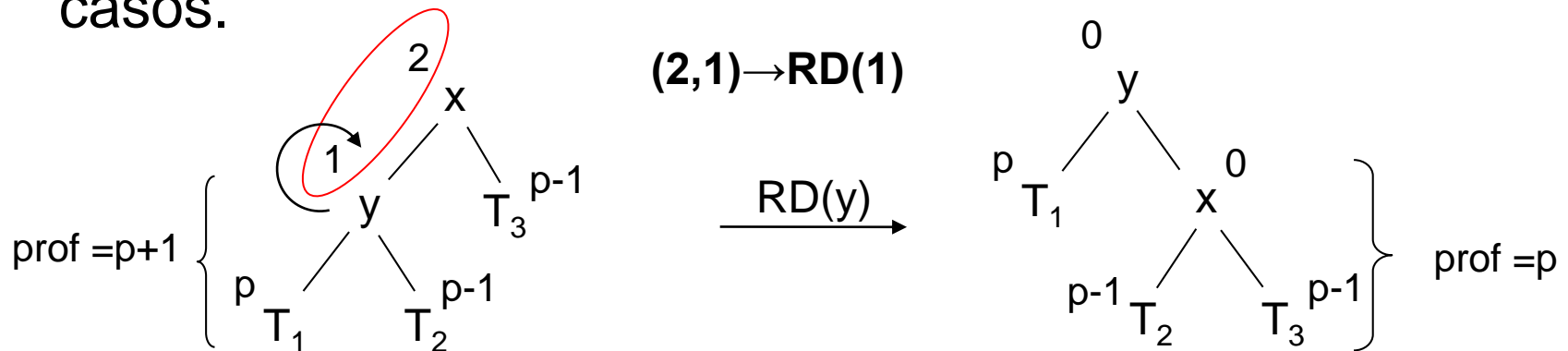
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Funcionamiento de las rotaciones I

- Para ver que efectivamente las rotaciones solucionan los desequilibrios es necesario ver cada uno de los casos.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

casos

p

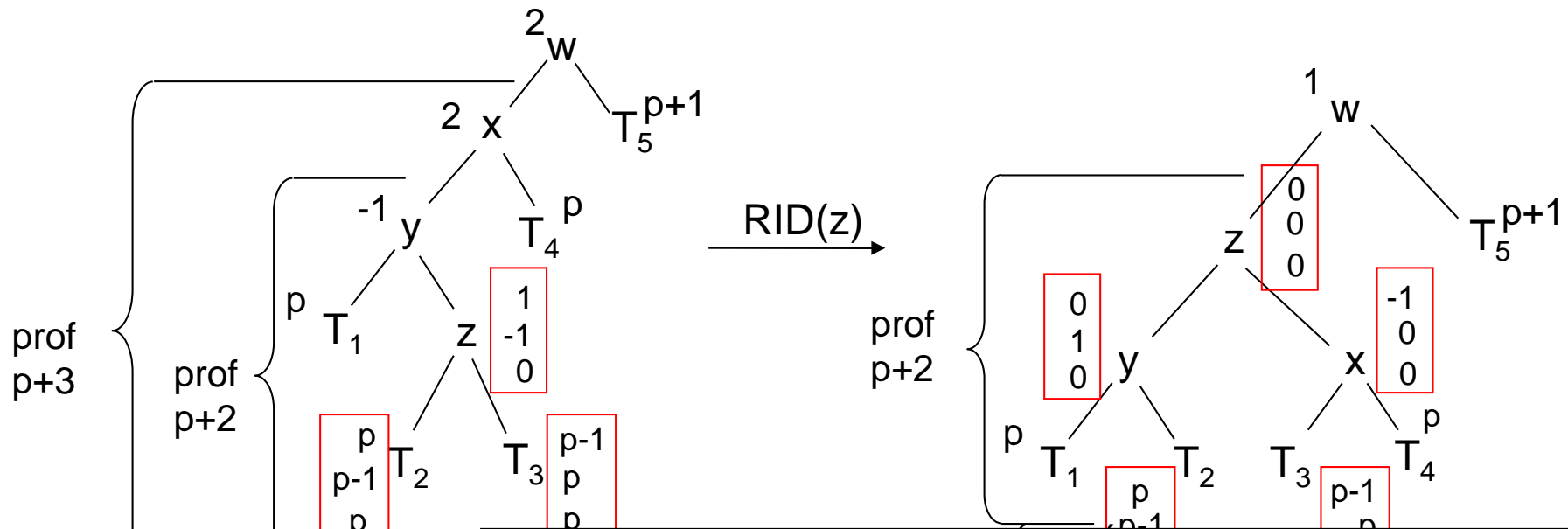
p

p

p

# Funcionamiento de las rotaciones II

- **Observación:** Las rotaciones resuelven desequilibrios de tipo  $\pm 2$ , situados mas arriba del desequilibrio ( $\pm 2, \pm 1$ )



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

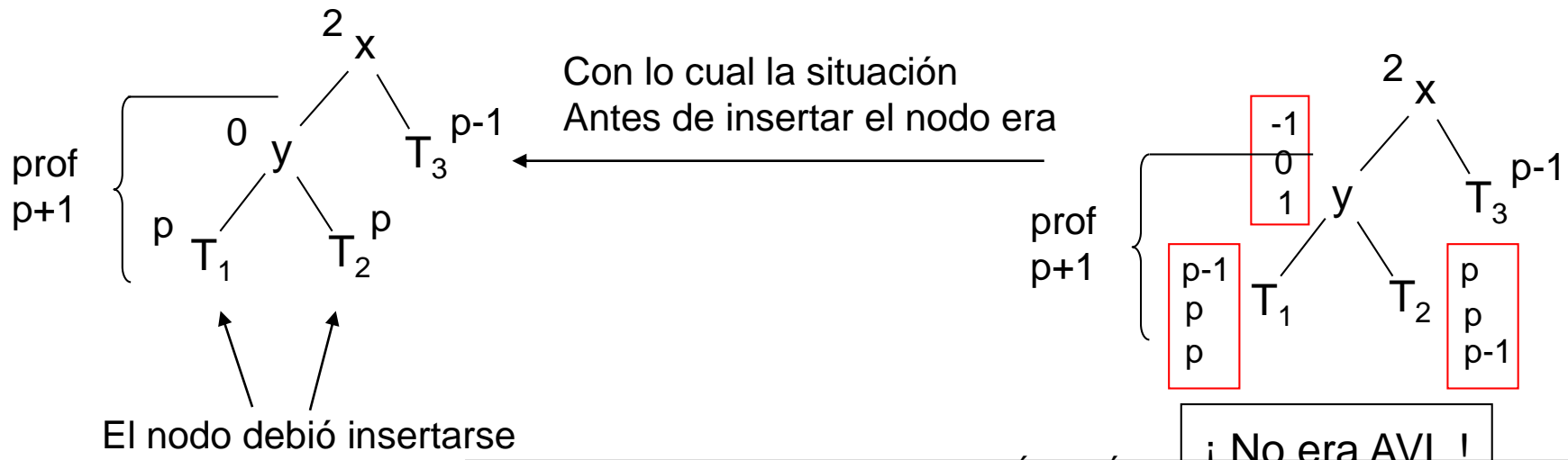
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Funcionamiento de las rotaciones III

- **Observación:** Si se tiene un AVL, tras la inserción de un elemento no pueden darse desequilibrios de la forma  $(\pm 2, 0)$ .

Supongamos que tras una inserción tenemos



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

# Profundidad de Árboles AVL

- **Proposición:** Si  $T$  es un AVL con  $N$  nodos entonces

$$\text{prof}(T) = O(\log(N))$$

- Dado que para cualquier árbol binario con  $N$  nodos se tiene que  $\text{prof}(T) = \Omega(\log(N))$ , tenemos que si  $T$  es AVL entonces

$$\text{prof}(T) = \Theta(\log(N))$$

- Para ver lo anterior vamos a estimar el número mínimo de nodos  $n$  de un AVL



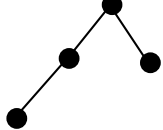
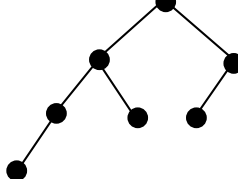
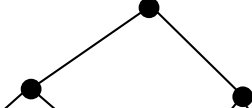
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# AVLs mínimos

p	AVL	$n_p$	$n_{p+1}$	$F_{p+2}$
0		1	2	$F_2$
1		2	3	$F_3$
2		4	5	$F_4$
3		7	8	$F_5$
4		12	13	$F_6$

Cartagena99

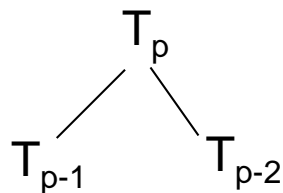
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

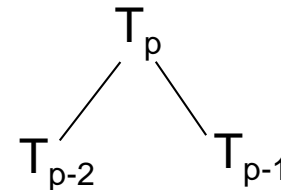
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# AVL de Fibonacci I

- $F_p$  es el p-ésimo número de Fibonacci.
- Los números de Fibonacci verifican:
  - $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , con  $F_0 = F_1 = 1$
- Los AVL  $T_p$  se construyen



o bien



- $n_p = 1 + n_{p-1} + n_{p-2}$ , y por tanto se tiene

$$\underbrace{1 + n_p}_{1 + n_p} = \underbrace{1 + n_{p-1}}_{1 + n_{p-1}} + \underbrace{1 + n_{p-2}}_{1 + n_{p-2}}$$

Obs:

 $n_{p-1} + n_{p-2} = F_p$ 

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

$p$   $p-1$   $p-2$

# AVL de Fibonacci II

- Se puede demostrar que el N-simo número de Fibonacci es

$$F_N = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \underbrace{\Phi^{N+1}}_{\downarrow N \rightarrow \infty \atop \infty} - \underbrace{\Psi^{N+1}}_{\downarrow N \rightarrow \infty \atop 0} \right) \text{ donde } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } \Psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ya que  $\Phi > 1$  y  $|\Psi| < 1$

- Con lo cual se tiene  $F_N \approx (1/\sqrt{5})\Phi^{N+1}$  y como  $n_p = F_{p+2} - 1$  obtenemos

$$n_p \approx \frac{\Phi^3}{\sqrt{5}} \Phi^p = C\Phi^p,$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Profundidad de un AVL II

- Entonces si  $T$  es un AVL con  $N$  nodos y profundidad  $p$ , se sigue que

$$N \geq n_p \approx C\Phi^p$$

- Esto es, se tiene que

$$\lg(N) \geq \lg(n_p) = \Omega(p \cdot \lg(\Phi)) = \Omega(p) = \Omega(\text{prof}(T))$$

es decir

$$\text{prof}(T) = p = O(\lg(n_p)) = O(\log(N))$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

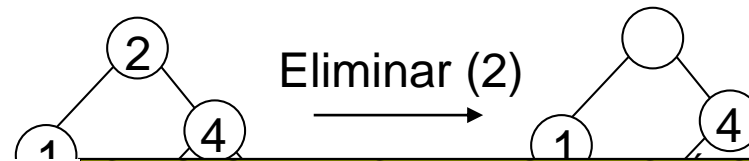
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Conclusión

- Si usamos un AVL como EdD para un diccionario, tanto **Buscar** como **Insertar** tienen un coste  $O(\log(N))$  en el caso peor.
- ¿Qué ocurre con **Borrar**?
  - No es fácil reajustar los nodos de un AVL después de haber eliminado un nodo.
  - La solución habitual es realizar un **Borrado Perezoso**: en lugar de eliminar el nodo, se marca como libre, además si el elemento se reinserta, la inserción es muy fácil y rápida.

Ejemplo:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# En esta sección hemos aprendido...

- El concepto de árbol AVL.
- A construir un árbol AVL insertando como en ABdBs y corrigiendo desequilibrios mediante rotaciones
- A estimar el número mínimo de nodos de un AVL de profundidad P
- La relación de lo anterior con los números de Fibonacci y algunas propiedades de estos
- Que la profundidad de un AVL con N nodos es  $O(\lg(N))$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Herramientas y técnicas a trabajar

- Construcción y propiedades de árboles AVL
- Construcción y propiedades de árboles de Fibonacci
- Problemas a resolver (al menos): los recomendados de la sección 12



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 3.4 Hashing

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Ordenación y búsqueda

- A grandes rasgos, los costes de búsqueda son  $1/N$  veces los de ordenación

	Ordenación	Búsqueda
Métod. malos	$O(N^2)$	$O(N)$
Métod. Buenos	$O(N \lg N)$	$O(\lg N)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Ordenación y búsqueda II

- ¿Es posible hacer búsquedas en tiempo inferior a  $O(\log(N))$ ?
  1. Imposible mediante comparaciones de clave
  2. Pero muy fácil cambiando el punto de vista!!
- Escenario:
  1. TAD diccionario con  $D=\{\text{datos } \mathbf{D}\}$ .
  2. Cada dato  $\mathbf{D}$  tiene una clave única  $\mathbf{k=k(D)}$ .
  3. Buscamos **por** claves pero **no mediante**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Idea 1

1. Calculamos  $k^* = \max\{k(D) : D \in D\}$
2. Guardamos cada  $D$  en una tabla  $T$  de tamaño  $k^*$  (suponiendo que no hay claves repetidas).

Pseudocódigo:

```
ind Buscar(dato D, tabla T)
    si  $T[k(D)] == D$ 
        return  $k(D)$ ;
    else
        devolver NULL
```

- Consecuencia:  **$n\text{Buscar}(k, D) = O(1)$  !!!**
- **Problema:** si  $k^*$  es muy grande (aunque  $|D|$  sea pequeño), la cantidad de memoria necesaria para la

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Idea 2

1. Fijamos  $M \succ |D|$  y se define una función inyectiva (si,  $k \neq k' \Rightarrow k(k) \neq k(k')$ )  $k : \{k(D)/D \in D\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, M\}$ .
2. Situamos  $D$  en la posición  $k(k(D))$  de la tabla  $T$ .
3. Pseudocódigo de Buscar :

```
ind Buscar2(dato D, tabla T)
  si  $T[k(k(D))]=D$ 
    return  $k(k(D))$ ;
  else
    devolver NULL
```

**Obs:**  $n_{\text{Buscar2}}(k, D) = O(1)$

- Tiempo de búsqueda constante con un consumo de memoria no exagerado.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Idea 3

1. Buscamos una función  $k$  universal (válida para cualquier conjunto de claves).

2. Somos flexibles con la inyectividad de  $k$ :

Permitimos que  $k$  no sea inyectiva, luego dos datos distintos pueden optar a ocupar la misma posición en la tabla  $T$ , pero

- a) Imponemos que el número de **colisiones**, esto es, pares  $k \neq k'$  pero  $k(k) = k(k')$  sean pocos.
- b) Implementamos algún mecanismo de resolución de colisiones

1. Cuestiones abiertas:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Funciones hash

- Objetivo: probabilidad pequeña de colisiones
- Si T tiene M datos, lo óptimo sería que
$$p(\text{colisión})=1/M$$
- Idea:  $h(D)$  = valor al lanzar un dado de M caras pero
  - Cada vez que aparece D el dado lo puede enviar a posiciones distintas!!
  - Luego queremos que  $h(k(D))$  siempre valga lo mismo para cada  $k(D)$  particular.
- Esto es, queremos que h sea **función y aleatoria** como `rand()` en C

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Hash por división

- Dado un diccionario  $D$  fijamos un número  $m > |D|$ , que sea primo.
- Definimos  $h(k) = k \% m$
- Con alguna condición adicional sobre  $m$ , se puede conseguir que para valores  $k_j$  aleatorios, los valores  $h(k_j)$  también lo parezcan
  - Esto es, superan diversos tests de aleatoriedad



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Hash por multiplicación

- Fijamos un número  $m > |D|$ , no necesariamente primo (por ejemplo  $2^k$  o  $10^k$ ) y un número  $\Phi$  irracional (p. ej.  $(1+\sqrt{5})/2$  ó  $(\sqrt{5}-1)/2$ )
- Definimos
$$h(k) = \lfloor m \cdot (k \cdot \Phi) \rfloor,$$
con  $(x)$  la parte fraccionaria de  $x$ :  $(x) = x - \lfloor x \rfloor$
- De nuevo se puede conseguir que para valores  $k_j$  aleatorios, los valores  $h(k_j)$  también lo parezcan
- Cuestión pendiente: **cómo resolver colisiones.**



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Función hash uniforme

- **Definición:** Decimos que una función hash  $h$  es **uniforme** si

Dados  $k, k'$  con  $k \neq k'$ , entonces  $p(h(k)=h(k'))=1/m$

- Las funciones hash uniforme son “ideales”.
  1. No se pueden conseguir por medios algorítmicos.
  2. Pero el rendimiento para ellas es óptimo.
- Las usaremos para simplificar los análisis teóricos que siguen



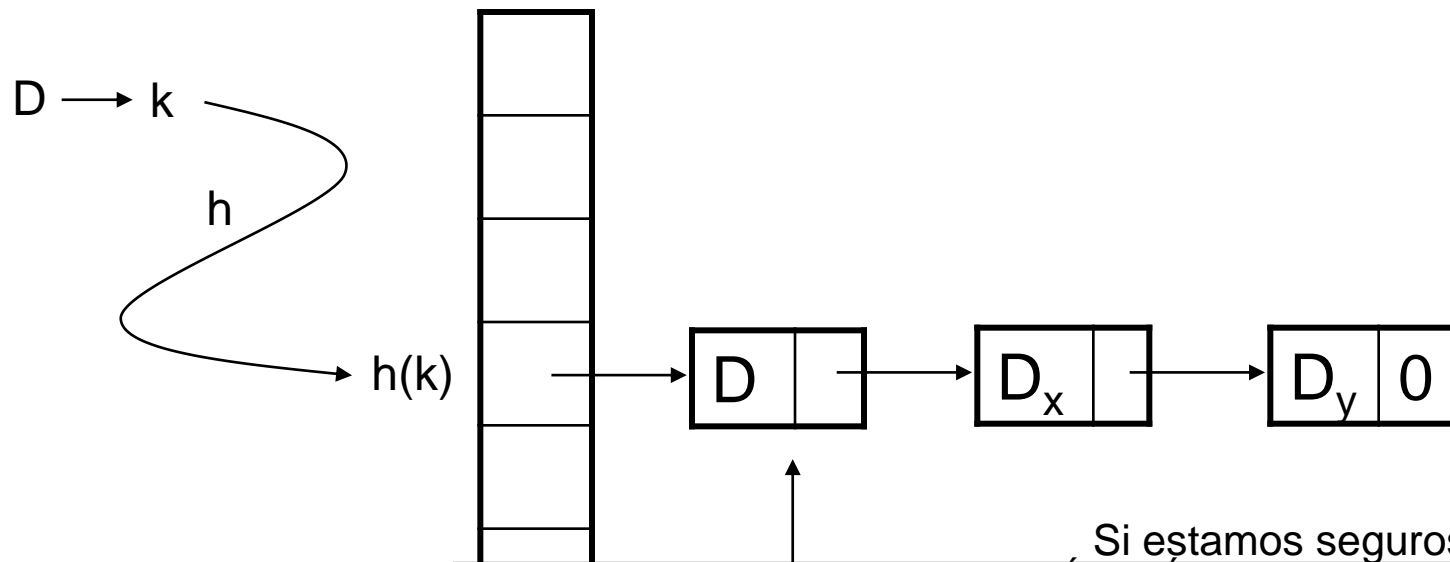
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Resolución por Encadenamiento

- En el hash por encadenamiento, usamos como tabla hash una **tabla de punteros a listas enlazadas**



Si estamos seguros de que D no  
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

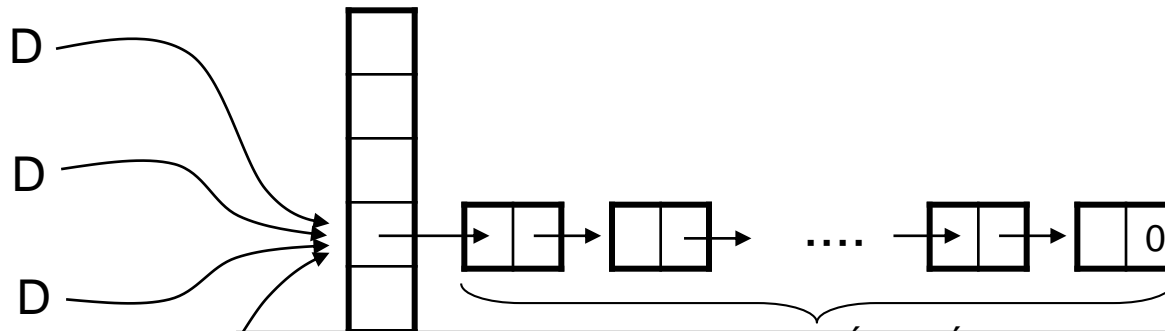
Cartagena99

# Buscar en Encadenamiento

- Pseudocódigo: BLin en lista enlazada.

```
ind Buscar(dato D, tabla T)
  return BLin(D, T[h(k(D))]);
```

- Coste ya no  $O(1)$ , pues en **BLin** hay un bucle
- Además  $W_{\text{BLin}}(N) = N$  si para todo  $k$ ,  $h(k) = h_0$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Esta creación puede pasar, pero debena ser muy poco probable si la

función hash está bien construida

# Encadenamiento con hash uniforme I

- **Proposición:** Sea  $h$  función hash uniforme en tabla hash con encadenamiento y dimensión  $m$  y sean  $N$  los datos a introducir; entonces:

$$(i) \quad A_{BHE}^f(N, m) = \frac{N}{m} = \lambda \quad \longleftarrow \quad \text{Factor de carga}$$

$$(ii) \quad A_{BHE}^e(N, m) = 1 + \frac{\lambda}{2} + O(1)$$

■  $\lambda$  se denomina el **factor de carga**: cuanto

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

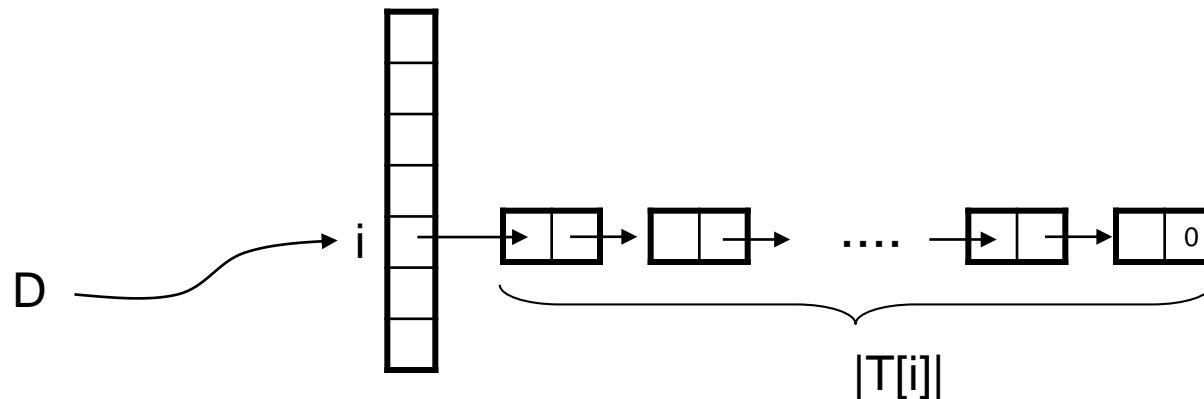
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Coste medio en búsqueda sin éxito

- **Demostración (i):** Sea **D** un dato que no esta en la tabla hash y sea  $h(k(D))=h(D)=i$ , sea  $n_{BHE}(D,T)=|T[i]|$  (número de elementos en la lista enlazada de la posición  $i$  de la tabla hash).



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

www.cartagena99.com

# Coste medio en búsqueda con éxito

- Demostración (ii): *Vamos a reducir la búsqueda con éxito a una búsqueda sin éxito en una tabla más pequeña.*
- Para ello numeramos los datos de la tabla  $T$ , según el orden en el que los introducimos en la tabla  $T$ ,  $\{D_1, D_2, \dots, D_j, \dots, D_N\}$
- Además denotamos por  $T_i$  al estado de la tabla  $T$  **antes** de introducir el elemento  $D_i$  (la tabla  $T_i$  tiene los elementos  $D_1, D_2, \dots, D_{i-1}$ ),
- Por tanto  $D_i$  **no está** en  $T_i$ , con lo cual se tiene:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

**Nota:** aquí asumimos que cada elemento  $D_i$  se inserta al final de la lista enlazada.

# Coste medio en búsqueda con éxito II

- Asumimos la aproximación

$$n_{BHE}^e(D_i, m) \cong 1 + A_{BHE}^f(i-1, m) = 1 + \frac{i-1}{m} \quad \leftarrow \text{Factor de carga en } T_i$$

entonces

$$\begin{aligned} A_{BHE}^e(N, m) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_{BHE}^e(D_i, m) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( 1 + \frac{i-1}{m} \right) = 1 + \frac{1}{Nm} \sum_{j=1}^{N-1} j = \\ &= 1 + \frac{1}{Nm} \frac{N(N-1)}{2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{N}{m} - \frac{1}{2m} = 1 + \frac{\lambda}{2} + O(1) \end{aligned}$$

**Obs:** Si la función hash es uniforme se obtienen

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

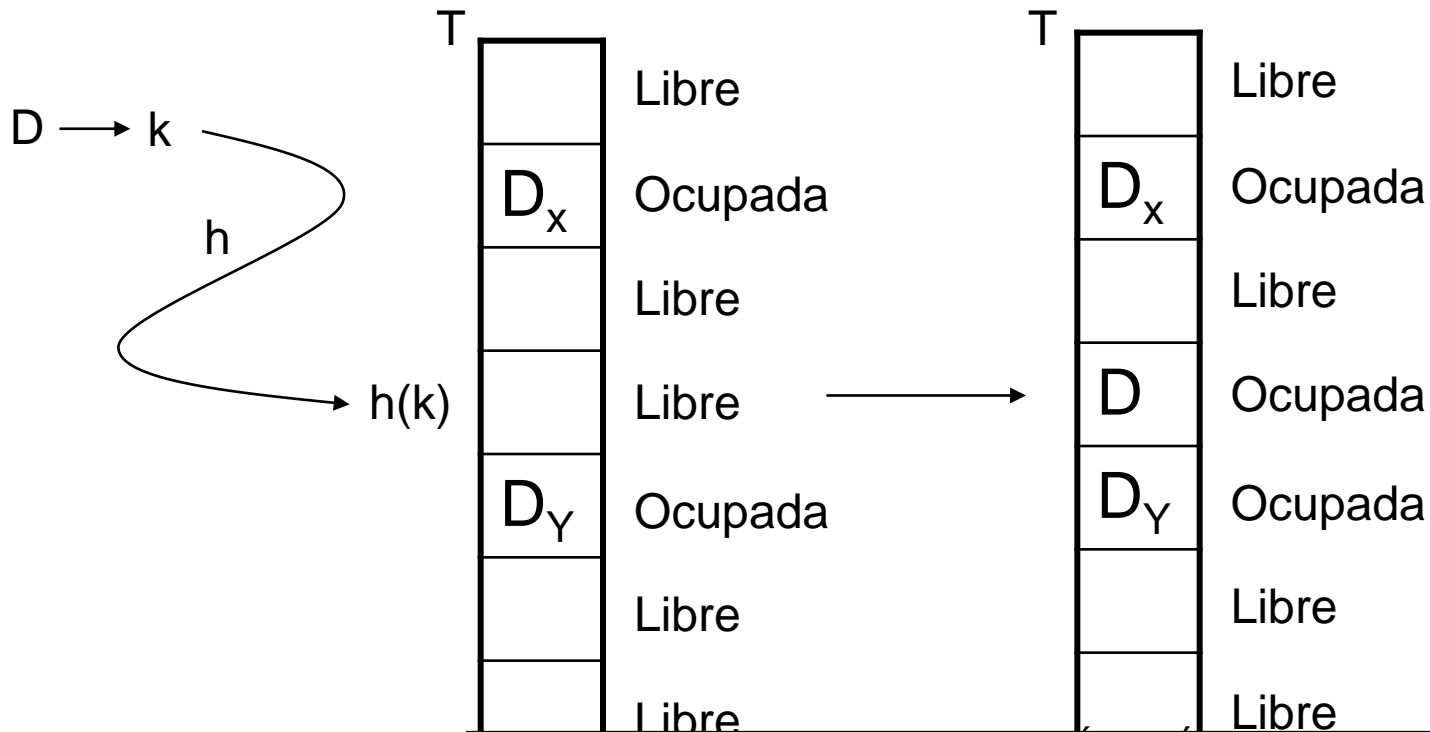
$A^* \cong 200/100 = 2$

$A^* \cong 1 + 2/2 = 2$

Cartagena99

# Hashing por direccionamiento abierto

- En el hash por direccionamiento abierto la tabla T contiene los datos



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

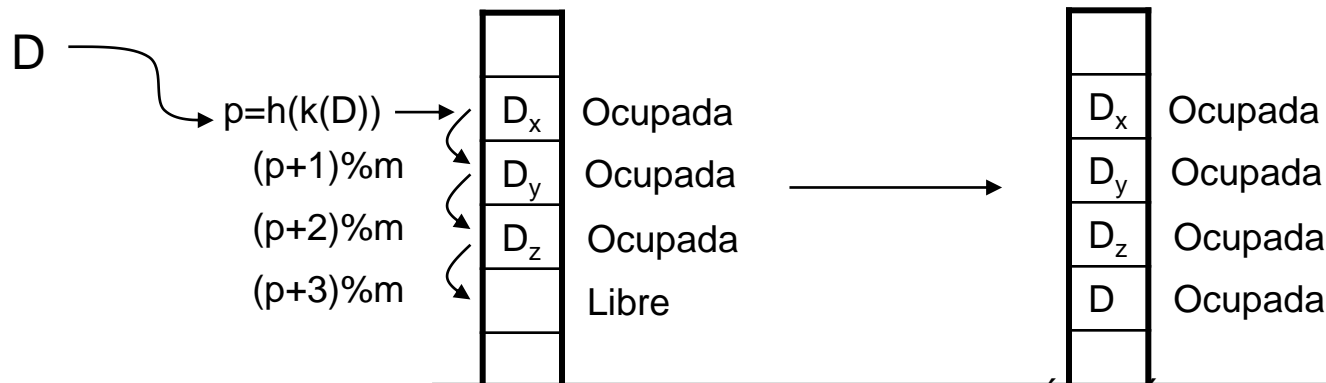
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

casina que esta ya ocupada (colision)?

# Colisiones en direccionamiento abierto

- Hay varios métodos para resolución de colisiones en direccionamiento abierto mediante repetición de sondeos
- **Sondeos lineales:** Si la posición  $p = T[h(D)]$  está ocupada, se intenta colocar  $D$  sucesivamente en las posiciones  $(p+1)\%m$ ,  $(p+2)\%m$ , ..., hasta llegar a un  $i$  donde la posición  $(p+i)\%m$  está libre.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Colisiones en direccionamiento abierto

- **Sondeos cuadráticos:** Igual que los sondeos lineales pero intentando en las posiciones  $p=(p+0^2)\%m, (p+1^2)\%m, (p+2^2)\%m, \dots$ , hasta que para algún  $i$ ,  $(p+i^2)\%m$  esté libre.
- **Sondeos aleatorios:** Intentamos las posiciones,  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_i$  obtenidas aleatoriamente
  - Este método es inviable en la práctica
  - Pero es la situación “ideal” en tablas hash
  - Facilita el cálculo del rendimiento de las búsquedas.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Diferencias en los métodos

- **Obs 1:** En hash con encadenamiento, la posición de un dato  $D$ , siempre será una posición fija de la tabla ( $h(k(D))$ ), En hash con direccionamiento abierto, la posición de  $D$  dependerá  $h(k(D))$  y **del estado de la tabla** en el momento de la Inserción.

- **Obs 2:** En hash con encadenamiento  $\lambda (=N/m)$ , puede ser  $>1$ .

En hash con direccionamiento abierto siempre se tiene  $N \leq m$ , y por tanto  $\lambda \leq 1$ .

En la práctica se usa  $N < m$  y  $\lambda < 1$  (por ejemplo  $m=2*N$  y  $\lambda=0.5$ ).



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Coste medio con sondeos aleatorios I

- **Proposición:** Sea  $h$  función hash uniforme en tabla hash con direccionamiento abierto y sondeos aleatorios. Entonces:

$$(i) \quad A_{SA}^f(N, m) = \frac{1}{1 - \lambda}$$

$$(ii) \quad A_{SA}^e(N, m) = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{1 - \lambda}$$

**Obs 1:** Si  $\lambda \rightarrow 1$  entonces  $A_{SA}^f(N, m) \rightarrow \infty$

**Obs 2:** Si  $\lambda \rightarrow 0$  entonces  $A_{SA}^e(N, m) \rightarrow 0$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



# Coste medio en búsqueda sin éxito

■ Demostración (i): Sea  $T$  una tabla hash con DA, de dimensión  $m$  y  $N$  datos. Como  $h$  es uniforme se tiene, dado un dato  $D$

$$p(T[h(D)] \text{ ocupada}) = N/m = \lambda$$

$$p(T[h(D)] \text{ libre}) = 1 - \lambda$$

N datos en una  
Tabla de tamaño  $m$

$$\Rightarrow A_{SA}^f(N, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n}^\circ \text{ de sondeos hechos}}}{k} \cdot p(\text{hacer } k \text{ sondeos}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Para hacer } k \text{ sondeos} \\ \text{tiene que ocurrir}}}{\lambda^{k-1}} (1 - \lambda) =$$

$\left\{ \begin{array}{l} k-1 \text{ posiciones} \\ \text{ocupadas} \end{array} \right\}$  y  $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ posición} \\ \text{libre} \end{array} \right\}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$(1 - \lambda)^2 \quad 1 - \lambda$$

# Coste medio en búsqueda con éxito I

- **Proposición (ii):**  $A_{SA}^e(N, m) = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{1-\lambda}$
- **Demostración:** De nuevo vamos a reducir la búsqueda con éxito a una búsqueda sin éxito en una tabla más pequeña.
- Al igual que en BHE enumeramos los datos de la tabla T, según el orden en el que los introducimos en la tabla T,  $\{D_1, D_2, \dots, D_j, \dots, D_N\}$ , y denotamos por  $T_i$  al estado de la tabla T antes de introducir el elemento  $D_i$ .

**Obs:** Si  $n_T^e(D_i)$  es el número de sondeos necesarios para

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$n_T(D_i) = n_T^e(D_i) \cong A_{SA}^e(i-1, m)$$

# Coste medio en búsqueda con éxito II

- Por tanto se tiene:

$$A_{SA}^e(N, m) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_T^e(D_i) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 - \frac{i-1}{m}} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{1 - \frac{j}{m}}$$

Esta última expresión se puede aproximar mediante una integral, con lo que se tiene:

$$A_{SA}^e(N, m) \cong \frac{1}{N} \int_0^N \frac{1}{1 - \frac{x}{m}} dx = \frac{1}{\frac{N}{m}} \int_0^{N/m} \frac{1}{1 - u} du = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{1}{1 - u} du$$

Cambio de variable.

$u = x/m \Rightarrow dx = m du$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$A_{SA}^e(N, m) = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{1 - \lambda}$$

# Costes medios para otros sondeos I

- En la demostración anterior vemos que si tenemos la expresión del rendimiento de la búsqueda sin éxito

$$f(\lambda) = A_{SA}^f(N, m) = \frac{1}{1 - \lambda}$$

podemos calcular el rendimiento de la búsqueda con éxito calculando

$$A_{SA}^e(N, m) \cong \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(u) du = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{1}{1 - u} du$$

- Este argumento lo podemos repetir con cualquier tipo de sondeo **S** con direccionamiento abierto, es decir



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Costes medios para otros sondeos II

- Proposición: Si se usan sondeos lineales:

$$(i) A_{SL}^f(N, m) \cong \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{(1-\lambda)^2} \right)$$

$$(ii) A_{SL}^e(N, m) \cong \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{(1-\lambda)^2} \right) du = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{1-\lambda} \right)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# En esta sección ...

## ■ Hemos aprendido

- ☐ El concepto de tabla hash.
- ☐ Los mecanismos de construcción y búsqueda en una tabla hash.
- ☐ El concepto de función hash uniforme
- ☐ Algunos tipos universales de funciones hash (división y multiplicación).



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# En esta sección .....

## ■ Y también

- ☐ Los principales métodos de resolución de colisiones en una tabla hash:  
**encadenamiento y direccionamiento abierto**
- ☐ Los principales métodos de **sondeo** en una tabla hash con **direccionamiento abierto**.
- ☐ A estimar el **rendimiento medio** de las búsquedas con o sin éxito en el caso de **sondeos aleatorios**.
- ☐ A reducir el rendimiento medio de las

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Herramientas y técnicas a trabajar

- Funcionamiento y construcción de tablas hash
- Diseño de tablas hash que aseguren un cierto rendimiento
- Estimación de costes medios de búsquedas con éxito a partir de costes medios sin éxito
- Problemas a resolver (al menos): los

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70