

## TEMA 5

### ENDOMORFISMOS DIAGONALIZABLES. MATRICES DIAGONALIZABLES.

#### 5.0 RECORDAR ENDOMORFISMOS

Un **endomorfismo** es una aplicación lineal de  $V_n$  en si mismo, es decir,  $f \in \text{End}V$  si  $f: V_n \rightarrow V_n$  lineal. Si por '+' definimos a la **suma** en  $\text{End}(V_n)$  y por '.' al producto de un escalar por un endomorfismo.

$(\text{End}(V_n), +, \cdot)$  es un **espacio vectorial**.

**Expresión matricial** de las ecuaciones de  $f$  respecto de  $B$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{o bien } Y = AX$$

$A$ : **matriz asociada a  $f$  respecto de la base  $B$** .

$(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$  coordenadas de  $f(e_i)$  en  $B$ .

**Observar:** Si  $f$  es un **endomorfismo** entre e.v.

$f$  es **inyectiva**  $\Leftrightarrow f$  es **suprayectiva** y por tanto:

$$\boxed{f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow f \text{ es biyectiva}}$$

#### MATRICES SEMEJANTES

Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  **matriz asociada a  $f$  respecto de la base  $B$** .

Si existe  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tal que  $M = P^{-1}AP$ ,  $M$  y  $A$  son **semejantes** y en ese caso

$M$  es la **matriz asociada a  $f$  respecto de otra base  $B'$  de  $V_n$** .

Es las columnas de  $P$  aparecen las coordenadas de los vectores de  $B'$  en la base  $B$ .

#### 5.1 INTRODUCCIÓN

Sea  $f_A: V_n \rightarrow V_n$  y sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  la matriz asociada a  $f$  respecto de una base  $B$ .

**OBJETIVO:**

**Localizar**, si es posible, una base  $B'$  respecto de la cual la **matriz asociada a  $f$ ,  $D_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , sea diagonal**.

Si es posible, entonces existirá una matriz  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tal que

$$D_A = P^{-1}AP.$$

Es decir, encontraremos una matriz  $D_A$ , diagonal siendo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## 5.1 INTRODUCCIÓN (Subespacios invariantes)

**DEFINICIÓN:** Sea  $V$  e.v.,  $f: V \rightarrow V$  endomorfismo.

1)  $U \subset V$  es **invariante** por  $f$  si  $f(U) \subset U$

2) Sea  $A_f$  matriz asociada a  $f$  respecto de una base  $B$ .

$\lambda \in \mathbb{R}$  es un **autovalor** (o valor propio) de  $f$  si  $\exists \bar{v} \in V - \{\bar{0}\}$  t.q  $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

En ese caso  $\bar{v}$  es **autovector** asociado al autovalor  $\lambda$

**EJEMPLOS:**  $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 $(x,y) \rightarrow (2x,y)$

1) Si  $U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} = L \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ;  $\dim U = 1$

Se cumple  $f(U) \subset U$  en efecto;  $f \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  y por tanto

$$f(U) = L \left\{ f \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\} = L \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = L \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = U$$

Se tiene  $f(U) = U$ . Por tanto  $U$  es **invariante** por  $f$

2)  $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Observamos que  $f \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

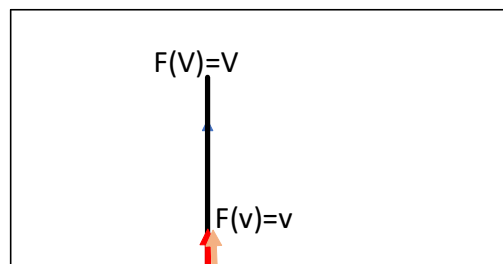
y por tanto  $f(\bar{u}) = 2\bar{u}$ ,  $\lambda = 2$  es **autovalor**, de  $f$  y

$\bar{u}$  es **autovector** asociado al autovalor  $\lambda = 2$

3)  $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Observamos que  $f \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

y por tanto  $f(\bar{v}) = \bar{v}$ ,  $\lambda = 1$  es **autovalor**, y

$\bar{v}$  es **autovector** asociado al autovalor  $\lambda = 1$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

**EJEMPLOS:**  $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x,y) \rightarrow (y,x)$  ;  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Si  $U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} = L\left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$

$$f\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(U) = \left\{ f\left( \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \right) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} = L\left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) = U$$

$U$  es invariante por  $f$ . En este caso  $f(U) = U$ .

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Observamos que } f(\bar{u}) = \bar{u},$$

$\lambda = 1$  es **autovalor**,  $\bar{u}$  es **autovector** asociado al autovalor  $\lambda = 1$

2)  $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x,y) \rightarrow (y,x)$  ;

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} = L\left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$f\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; f(\bar{v}) = -\bar{v},$$

$$f(V) = \left\{ f\left( \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \right) = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} = L\left( \left\{ f\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Observamos que } f(\bar{v}) = -\bar{v},$$

$\lambda = -1$  es **autovalor**,  $\bar{v}$  es **autovector** asociado al autovalor  $\lambda = -1$

3



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## EJEMPLO: Interpretación geométrica .

### 1 Simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante en $\mathbb{R}^2$

$$f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; f(1,0) = (0,1); f(0,1) = (1,0) \quad A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(x,y) \rightarrow (y,x)$$

Buscamos vectores que se transforman en **vectores de la misma dirección**

**1A** Sea  $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .. Sabemos que  $f(\bar{u}) = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = \bar{u}$

y también que,

$\lambda = 1$  es **autovalor**,  $\bar{u}$  es **autovector** asociado al autovalor  $\lambda = 1$   
 $\bar{u}$  se transforma en si mismo  $f(\bar{u}) = \bar{u}$  (vector de la misma dirección)

.....  
Pero el vector  $\bar{u}$  no es el único que lo cumple  $f(\bar{u}) = \bar{u}$

Observamos que también  $\bar{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  cumple

$$f(\bar{w}) = 1 \times \bar{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underset{\bar{w}}{1} \times \underset{\bar{w}}{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$\bar{w}$  es **autovector** asociado al autovalor  $\lambda = 1$

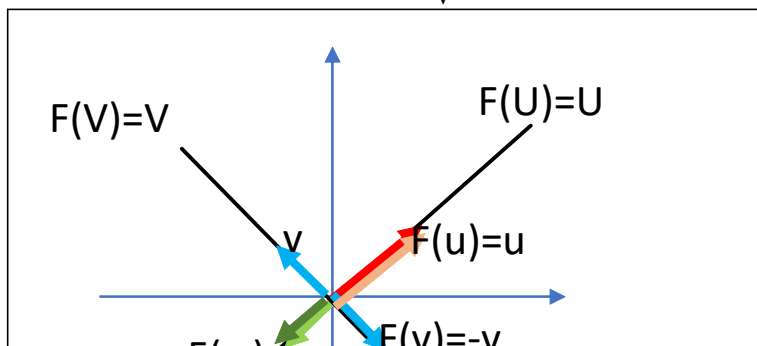
$\bar{u}$  y  $\bar{w}$  son **autovectores asociados al mismo autovalor**

---

**1B**  $\bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Observamos que  $f(\bar{v}) = -\bar{v}$ ,

$\lambda = -1$  es **autovalor**,  $\bar{v}$  es **autovector** asociado al autovalor  $\lambda = -1$

$$f(\bar{v}) = (-1)\bar{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\bar{v}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \underset{\lambda}{(-1)} \times \underset{\bar{v}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

**2** **Giro de 90°**  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x,y) = (-y,x)$

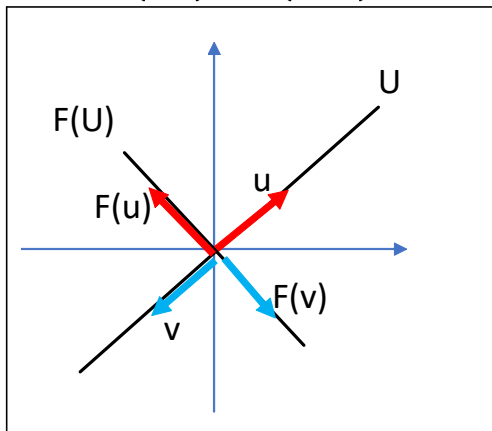
$$f(1,0) = (0,1); f(0,1) = (-1,0)$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Veamos como se transforman los vectores a través de esta aplicación lineal en algunos ejemplos

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in U$$

$$; f(\bar{u}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; f(\bar{v}) = f\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$



$$f(U) = L\left(\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) \not\subseteq U; U \text{ no es invariante por } f$$

Veamos que:

**Ningún vector no nulo se transforma en otro de la misma dirección**

$$\text{En efecto: Si } f(x,y) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

3 Consideremos el endomorfismo  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya matriz

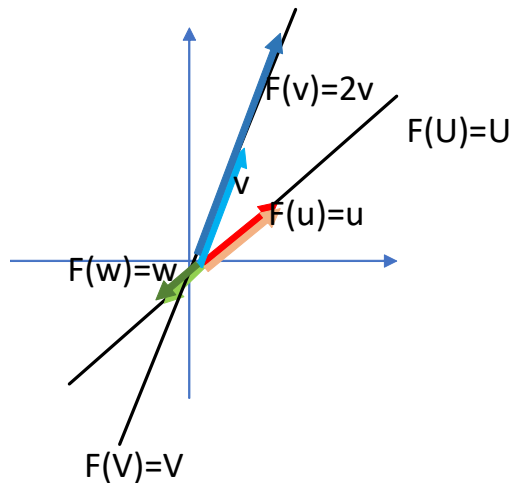
asociada respecto de las bases canónicas es  $A_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

Estudiar si  $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  son autovectores asociados a los autovalores  $\lambda = 1$  y  $\lambda = 2$

En efecto:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



### ¿Como obtenerlos autovalores ?

Supongamos que  $\lambda$  es un autovalor de  $f$  entonces, por definición

$$f(x,y) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## 5.2 AUTOVECTORES. AUTOVALORES. AUTOESPACIOS.

NOTA: Trabajaremos con espacios vectoriales finitos

**DEFINICIONES:** Sea  $f: V_n \rightarrow V_n$  endomorfismo de  $V_n$ .

Sea  $A$  matriz asociada a  $f$  respecto de una base  $B$ .

$\lambda \in \mathbb{K}$  es un **autovalor (valor propio)** de  $f$  si

existe un vector  $\bar{v} \in V_n \setminus \{\bar{0}\}$  tal que  $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

a  $\bar{v}$  se le denomina **autovector** asociado al **autovalor**  $\lambda$ .

**Espectro** de  $f$ : ( Conjunto de autovalores de  $f$  )

$\sigma(f) = \{ \lambda \in \mathbb{K} / \lambda \text{ es autovalor de } f \}$  **espectro** de  $f$

**Autoespacio** o **s.v. propio** asociado a  $\lambda$

$V(\lambda) = \{ \bar{v} \in V / f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \}$  **autoespacio**

Análogamente se definen  $\lambda \in \mathbb{K}$  es un **autovalor (valor propio)** de  $A$  y **espectro** de  $A$ :  $\sigma(A)$

**PROPIEDADES:** Sea  $f: V_n \rightarrow V_n$  endomorfismo de  $V_n$ .

1) Si  $\lambda \in \sigma(f)$  entonces  $V(\lambda)$  es un s.v. de  $V_n$

Es decir: El conjunto formado por **todos los autovectores** asociado a un mismo autovalor  $\lambda$  es un s.v.

.....  
 2)  $\left. \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(f) \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{array} \right\} \Rightarrow V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{\bar{0}\}$

Es decir:

Un vector no puede ser autovector asociado a dos autovalores distintos

.....  
 3)  $\left. \begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \sigma(f) \text{ donde } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j \\ \bar{x}_i \in V(\lambda_i) - \{\bar{0}\} \quad i = 1, \dots, m \end{array} \right\} \Rightarrow \{ \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m \} \text{ l.i.}$

Es decir:

Dos autovectores asociados a dos autovalores distintos son vectores l.i.

.....  
 4)  $f(V(\lambda)) \subset V(\lambda)$ . Se dice que  $V(\lambda)$  es un s.v. invariante por  $f$

Es decir:

Todos los autoespacios son invariantes

5)  $V(\lambda) = \ker(f - \lambda i_{V_n})$ .

En efecto: Si  $\lambda$  es un autovalor de  $f$ , existe un vector  $\bar{v}$  no nulo tal qque

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

### 5.3

## CARACTERIZACIÓN DE AUTOVALORES DE UN ENDOMORFISMO.

### PROPIEDADES:(Caracterización de autovalores)

Sea  $f: V_n \rightarrow V_n$  endomorfismo de  $V_n$ .

Sea  $A$  matriz asociada a  $f$  respecto de una base  $B$

**1**  $\lambda = 0$  autovalor de  $f \Leftrightarrow f$  no es inyectiva

$$\lambda = 0 \text{ autovalor de } A \Leftrightarrow \text{rang}A < n \Leftrightarrow \det A = 0$$

.....  
 $\lambda = 0$  autovalor de  $f \Leftrightarrow$  existe un  $\bar{v}$  no nulo tal que

$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} = 0 \times \bar{v} = \bar{0}$$

Luego  $\bar{0} \neq \bar{v} \in \ker f$ . Por tanto  $f$  no es inyectiva

**2**  $\lambda \in \mathbb{K}$  autovalor de  $f \Leftrightarrow \lambda - r$  es autovalor de  $f - ri_{V_n}, \forall r \in \mathbb{K}$

$\lambda \in \mathbb{K}$  autovalor de  $A \Leftrightarrow \lambda - r$  es autovalor de  $A - rI_n, \forall r \in \mathbb{K}$

.....  
 $\lambda \in \mathbb{K}$  autovalor de  $f \Leftrightarrow$  existe un  $\bar{v}$  no nulo tal que  $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \Leftrightarrow f(\bar{v}) - \lambda \bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow f(\bar{v}) - \lambda i_V(\bar{v}) = \bar{0} \Leftrightarrow (f - \lambda i_V)(\bar{v}) = \bar{0}$$

Por tanto

$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \Leftrightarrow f(\bar{v}) - ri_V(\bar{v}) = \lambda i_V(\bar{v}) - ri_V(\bar{v}) \Leftrightarrow (f - ri_V)(\bar{v}) = (\lambda - r)i_V(\bar{v})$$

$$\Leftrightarrow (f - ri_V)(\bar{v}) = (\lambda - r)\bar{v}$$

Por tanto  $\lambda - r$  es autovalor de  $f - ri_{V_n}, \forall r \in \mathbb{K}$

**3**  $\lambda \in \mathbb{K}$  autovalor de  $f \Leftrightarrow f - \lambda i_{V_n}$  no es inyectiva

$$\lambda \in \mathbb{K} \text{ autovalor de } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

.....  
En efecto

$\lambda \in \mathbb{K}$  autovalor de  $f \Leftrightarrow$  existe un  $\bar{v}$  **no nulo** tal que  $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \Leftrightarrow f(\bar{v}) - \lambda \bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow f(\bar{v}) - \lambda i_V(\bar{v}) = \bar{0} \Leftrightarrow (f - \lambda i_V)(\bar{v}) = \bar{0}$$

Por tanto  $f - \lambda i_{V_n}$  no es inyectiva

Es decir  $\ker(f - \lambda i_{V_n}) \neq \{\theta\}$

**5)**  $V(\lambda) = \ker(f - \lambda i_{V_n})$

.....  
 $\bar{v} \in V(\lambda) = \ker(f - \lambda i_{V_n})$  existe un  $\bar{v}$  **no nulo** tal que  $(f - \lambda i_{V_n})(\bar{v}) = \bar{0}$

y por tanto,

si  $\lambda \in \mathbb{K}$  es autovalor de  $f$  asociado al autovector  $\bar{v} \neq \bar{0}$ , se cumple

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



### **OBSERVACIONES: Un ejemplo**

Si  $A$  la matriz asociada a  $f$  en una base determinada

$$\text{Sea } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left( \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

**Este sistema nos permitirá encontrar los distintos autovalores y los autovectores asociados a cada autovalor.**

### **Búsqueda de los autovalores**

El sistema tiene solución distinta de la trivial si y solo si  $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

Por tanto los autovalores buscados son  $\lambda = 1$  y  $\lambda = 2$

$$\sigma(f) = \{ \lambda \in \mathbb{K} / f - \lambda i_{V_n} \text{ no es inyectiva} \} = \{1(\text{simple}), 2(\text{simple})\}$$

A  $\sigma(f)$  o  $\sigma(A)$  se le denomina espectro de la aplicación lineal



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### Búsqueda de los autovectores

Para  $\lambda = 1$

$$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_2)$$

Por tanto para localizar los autovectores asociados al autovalor  $\lambda = 1$  debemos encontrar el núcleo de la aplicación asociada a la matriz  $A - I_2$ .

$$(A - I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases}$$

$$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_2) = L(\{(1,1)\})$$

$V(1)$  es el **autoespacio** asociado al **autovalor**  $\lambda = 1$

.....  
Para  $\lambda = 2$

$$V(2) = \ker(f - 2i_{V_n}) = \ker(A - 2I_2)$$

Por tanto para localizar los autovectores asociados al autovalor  $\lambda = 2$  debemos encontrar el núcleo de la aplicación asociada a la matriz  $A - 2I_2$ .

$$(A - 2I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \end{cases}$$

$$V(2) = \ker(f - 2i_{V_n}) = \ker(A - 2I_2) = L(\{(2,1)\})$$

$V(2)$  es el **autoespacio** asociado al **autovalor**  $\lambda = 2$

---

Observemos que  $B = \{(1,1), (2,1)\}$  es una ba e de  $\mathbb{R}^2$  formada por autovectores



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## MAS PROPIEDADES DE LOS AUTOVALORES:

Sea  $A \in M_n(\mathbb{K})$

1)  $A$  y  $A^T$  tienen los mismos autovalores

2)  $\lambda$  autovalor de  $A \Rightarrow k\lambda$  es autovalor de  $kA$

En efecto:

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v} \Leftrightarrow (kA)\bar{v} = (k\lambda)\bar{v}$$

3)  $\lambda$  autovalor de  $A \Leftrightarrow \lambda - r$  es autovalor de  $A - rI_n$

En efecto

$$\begin{aligned} A\bar{v} = \lambda\bar{v} &\Leftrightarrow A\bar{v} - rI_n\bar{v} = \lambda I_n\bar{v} - rI_n\bar{v} \Leftrightarrow (A - rI_n)\bar{v} = (\lambda I_n - rI_n)\bar{v} \\ &\Leftrightarrow \lambda - r \text{ es autovalor de } A - rI_n \end{aligned}$$

4)  $\lambda$  autovalor de  $A$  y  $A$  regular  $\Rightarrow \lambda^{-1}$  autovalor de  $A^{-1}$

En efecto:

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\bar{v} = A^{-1}\bar{v} \Leftrightarrow A^{-1}\bar{v} = \lambda^{-1}\bar{v}$$

---

5)  $A$  y  $B$  semejantes  $\Rightarrow A$  y  $B$  tienen los mismos autovalores

---

6)  $\lambda$  autovalor de  $A \Rightarrow \lambda^n$  autovalor de  $A^n$

.....  
Sea  $\lambda$  autovalor de  $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$  para algún  $\bar{v}$  no nulo entonces

$$A^2\bar{v} = A(A\bar{v}) = A(\lambda\bar{v}) = \lambda A\bar{v} = \lambda\lambda\bar{v} = \lambda^2\bar{v}$$

Supongamos  $A^{n-1}\bar{v} = \lambda^{n-1}\bar{v}$ .

Entonces

$$A^n\bar{v} = A(A^{n-1}\bar{v}) = A(\lambda^{n-1}\bar{v}) = \lambda^{n-1}(A\bar{v}) = \lambda^{n-1}\lambda\bar{v} = \lambda^n\bar{v}$$

---

7)  $A$  invertible  $\Leftrightarrow \lambda = 0$  no es autovalor de  $A$

.....  
En efecto

Si  $\lambda = 0$  es autovalor de  $A$  existe no nulo tal que

$$\Leftrightarrow A\bar{v} = 0\bar{v} \Leftrightarrow A\bar{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{0} \neq \bar{v} \in \ker A$$

Por tanto  $A$  no es invertible

## 5.4 POLINOMIO CARACTERÍSTICO. ORDEN DE UN AUTOVALOR

Sea  $f: V_n \rightarrow V_n$  endomorfismo de  $V_n$ .

Sea  $A$  matriz asociada a  $f$  respecto de una base  $B$ .

$\lambda \in \mathbf{K}$  autovalor de  $f \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f - \lambda i \text{ no es inyectiva} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0}$$

$\det(A - \lambda I) = 0$  **ecuación característica**

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  **polinomio característico**

**PROPOSICION:**(Obtención de autovalores y autovectores)

1)  $\lambda$  autovalor de  $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

2)  $\bar{x} \in V(\lambda) \Leftrightarrow \bar{x} \in \ker(f - \lambda i)$

**PROPOSICIÓN:** El polinomio característico no depende de la base elegida.

**EJEMPLOS:** En  $\mathbb{R}^3$ . Buscar y estudiar el espectro de las siguientes matrices

**1** Rotación de  $90^\circ$  alrededor del eje z:  $\sigma(f_A) = \{1\}$ ,  $V(1) = L(\{(0,0,1)\})$

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ Sea } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ auto vector asociado a } \lambda$$

$$\text{entonces: } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**Polinimio característico**

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$$

$\sigma(f) = \{1\}$  **espectro de f**

**Autoespacio asociado a  $\lambda = 1$**

$$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3)$$

$$(A - I_3)\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## 2 Rotación de 180° alrededor del eje z

$\sigma(f) = \{-1, 1\}$ ,  $V(1) = L(\{(0, 0, 1)\})$ ,  $V(-1) = L(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$ .

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ Sea } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ auto vector asociado a } \lambda$$

$$\text{entonces: } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

### Polinomio característico

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$$

$\sigma(f) = \{1(\text{doble}), -1(\text{simple})\}$  **espectro de f**

### Autoespacio asociado a $\lambda = 1$

$$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3)$$

$$(A - I_3)\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y = 0$$

Una base del s.v.  $V(1)$  es  $B_{V(1)} = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Por tanto  $V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3) = L(\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\})$

### Autoespacio asociado a $\lambda = -1$

$$V(-1) = \ker(f + i_{V_n}) = \ker(A + I_3)$$

$$(A + I_3)\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Una base del s.v.  $V(-1)$  es  $B_{V(-1)} = \{(1, -1, 0)\}$

Por tanto  $V(-1) = \ker(f + i_{V_n}) = \ker(A + I_3) = L(\{(1, -1, 0)\})$

Por las propiedades estudiadas sabemos que

$B = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, -1, 0)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  formada por autovectores de  $f_A$

**3** Obtener el espectro de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  y obtener

una base de los autoespacios asociados a los los distintos autovalores.

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-5)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$\sigma(f) = \{1(\text{simple}), 5(\text{simple}), -1(\text{simple})\}$  **espectro de f**

**Autoespacio asociado a  $\lambda = 1$**

$$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3)$$

$$(A - I_3)\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

Una base del s.v.  $V(1)$  es  $B_{V(1)} = \{(-2, -3, 2)\}$

Por tanto  $V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3) = L\{(-2, -3, 2)\}$

**Autoespacio asociado a  $\lambda = -1$**

$$V(-1) = \ker(f + i_{V_n}) = \ker(A + I_3)$$

$$(A + I_3)\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Una base del s.v.  $V(-1)$  es  $B_{V(-1)} = \{(0, -3, 1)\}$

Por tanto  $V(-1) = \ker(f + i_{V_n}) = \ker(A + I_3) = L\{(0, -3, 1)\}$

**Autoespacio asociado a  $\lambda = 5$**

$$V(5) = \ker(f - 5i_{V_n}) = \ker(A - 5I_3)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

4 Estudiar : 
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**PROPOSICIÓN:**

- 1)  $A$  y  $B$  semejantes  $\Rightarrow A$  y  $B$  tienen el mismo polinomio característico
- 2) El recíproco no se verifica en general

**DEFINICIÓN:**

$\lambda_0$  autovalor de  $A$  de **orden**  $\alpha$

$\Leftrightarrow \lambda_0$  es raíz de multiplicidad  $\alpha$  de  $\det(A - \lambda I) = 0$

**EJEMPLO:**

**Rotación de 180° alrededor del eje z**

$\sigma(f) = \{-1, 1\}$ , orden  $\lambda = -1$  es 2 (autovalor doble)  
orden  $\lambda = 1$  es 1 (autovalor simple)

**PROPOSICIÓN:**  $1 \leq \dim V(\lambda_0) \leq \alpha$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## 5.5 ENDOMORFISMOS Y MATRICES DIAGONALIZABLES

### OBSERVACIONES:

$V_n$  e.v,  $\dim V_n = n, f \in \text{End}(V_n)$ ,

$A$  matriz asociada a  $f$  respecto de una base  $B$ .

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} = \sigma(f)$  y sea  $d_i = \dim V(\lambda_i)$ ,  $\alpha_i = \text{orden}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$

Se verifica:

1) Si  $\lambda_i \neq \lambda_j$  con  $i \neq j$  entonces  $V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_r) \subset V_n$

Luego:  $\dim(V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_r)) = d_1 + \dots + d_r \leq n$

2) En  $V_n$  existe una base de autovectores de  $f \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow d_1 + \dots + d_r = n \Leftrightarrow \begin{cases} a) \alpha_1 + \dots + \alpha_r = n \\ b) \alpha_i = d_i \quad i = 1, \dots, r \end{cases}$$

3) Si  $f$  tiene  $n$  autovalores distintos, entonces en  $V_n$  existe una base de autovectores

### PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

Búsqueda, si es posible, de una matriz diagonal semejante a la dada

NOTACION:  $f(\bar{e}_i) = \lambda_i \bar{e}_i$ ,  $AE_i = \lambda_i E_i$

### PROPOSICION:

Sea  $V_n$  e.v.,  $\dim V_n = n, f \in \text{End}(V_n)$ ,

y  $D_f$  matriz asociada a  $f$  respecto de la base  $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  de  $V_n$ .

Entonces:  $D_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  es **diagonal**  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \text{ es una base de vectores propios de } f \\ (f(\bar{e}_i) = \lambda_i \bar{e}_i \quad i = 1, \dots, n)$$

En ese caso: a)  $d_{ii} = \lambda_i \quad i = 1, \dots, n$

b)  $\text{orden} \lambda_i$ : n° de veces que  $\lambda_i$  figura en la diagonal principal

### PROPOSICIÓN: (Diagonalización de endomorfismos. Diagonalización de matrices)

Sea  $f: V_n \rightarrow V_n$  **endomorfismo** de  $V_n$ .

Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  **matriz asociada** a  $f$  **respecto de una base**  $B$ .

Entonces

**1**  $f$  es **diagonalizable** si lo es **cualquiera** de sus **matrices asociadas**.

**2**  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  es **diagonalizable** sobre  $\mathbb{K}$  si:

"  $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$  tal que  $D = P^{-1}AP$  es diagonal " (diagonalización por semejanza)

En ese caso:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99



### OBSERVACIÓN:

No toda matriz es diagonalizable.,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  no es diagonalizable.

¿Son matrices diagonalizables?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

---

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Conocemos ya}$$

#### **Polinomio característico de A**

$$P(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \quad \sigma(f) = \{1\} \quad \text{espectro de } f$$

#### **Autoespacio asociado a $\lambda = 1$**

$$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3)$$

**A no es diagonalizable**  $1 = \alpha_1 = \text{orden}(\lambda_1) = 1$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Polinomio característico

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$$

$$\sigma(f) = \{1(\text{doble}), -1(\text{simple})\} \text{ espectro de } f$$

Una base del s.v.  $V(1)$  es  $B_{V(1)} = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Por tanto  $V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3) = L(\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\})$

Una base del s.v.  $V(-1)$  es  $B_{V(-1)} = \{(1, -1, 0)\}$

$B = \left\{ \underset{B_{V(1)}}{(1, 1, 0), (0, 0, 1)}, \underset{B_{V(-1)}}{(1, -1, 0)} \right\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  formada

por autovectores de  $f_A$

$$\text{Además } f_C(\bar{e}_1) = \bar{e}_1; f_C(\bar{e}_2) = \bar{e}_2; f_C(\bar{e}_3) = (-1) \times \bar{e}_3$$

$$D = \mathbf{M}_f(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \mathbf{M}_f(B, B) = P^{-1}AP$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, M_f(C_{R^3}, C_{R^3}) = \mathbf{C}$$

Conocemos

$\sigma(f) = \{1(\text{simple}), 5(\text{simple}), -1(\text{simple})\}$  **espectro de f**

$$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3) = L\{(-2, -3, 2)\}$$

$$V(-1) = \ker(f + i_{V_n}) = \ker(A + I_3) = L\{(0, -3, 1)\}$$

$$V(5) = \ker(f - 5i_{V_n}) = \ker(A - 5I_3) = L\{(0, 0, 1)\}$$

or  $\text{rd}(1) = 1 = \dim V(1)$ ;  $\text{ord}(-1) = 1 = \dim V(-1)$ ,  $\text{ord}(5) = 1 = \dim V(5)$

**C es diagonalizable y además**

$$V(1) = L\{(-2, -3, 2)\}; V(-1) = L\{(0, -3, 1)\}; V(5) = L\{(0, 0, 1)\}$$

$$\text{Nueva base } B = \left\{ \begin{matrix} (-2, -3, 2) \\ \bar{e}_1 \\ (0, -3, 1) \\ \bar{e}_2 \\ (0, 0, 1) \\ \bar{e}_3 \end{matrix} \right\}$$

$$\text{Además } f_C(\bar{e}_1) = \bar{e}_1; f_C(\bar{e}_2) = (-1) \times \bar{e}_2; f_C(\bar{e}_3) = 5 \times \bar{e}_3$$

$$D = \mathbf{M}_f(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \mathbf{M}_f(B, B) = P^{-1}AP$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 19$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

### PROPOSICIÓN:

Sea  $f : V_n \rightarrow V_n$  endomorfismo de  $V_n$ .

Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  matriz asociada a  $f$  . respecto de una base  $B$

1)  $f$  es **diagonalizable**  $\Leftrightarrow$  en  $V_n$  **existe** una **base de autovectores** de  $f$

2)  $f$  es **diagonalizable**  $\Rightarrow f$  tiene **n autovalores** en  $\mathbb{K}$

$$\text{y, } f \text{ es } \boxed{\text{diagonalizable}} \Leftrightarrow \begin{cases} a) \alpha_1 + \dots + \alpha_r = n \\ b) \alpha_i = d_i \quad i = 1, \dots, r \end{cases}$$

3)  $f$  tiene **n autovalores distintos**  $\Rightarrow f$  es **diagonalizable**

### 5.6 APLICACIONES

#### Cálculo de la potencia n-ésima de una matriz

1) Si **A es diagonal**

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_p \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_p^n \end{pmatrix}$$

2) Si **A es diagonalizable**

$$D = P^{-1}AP \text{ diagonal} \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$$

EJEMPLO: Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , obtener  $A^7$       20

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70