

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

1. *Introducción*
2. *Composición de velocidades*
3. *Composición de aceleraciones*
4. *Movimientos inversos*
5. *Movimientos de sólidos en contacto*
6. *Bibliografía*

### 1. Introducción

La teoría de composición de movimientos de sólidos permite determinar el movimiento de un cierto sólido  $S_2$  respecto de otro sólido de referencia  $S_1$  ( $S_2/S_1$ ) utilizando otro sistema o sólido intermedio  $S_0$  de forma que permita determinar dicho movimiento ( $S_2/S_1$ ) mediante los movimientos de  $S_2$  con respecto de  $S_0$  ( $S_2/S_0$ ) y de  $S_0$  con respecto de  $S_1$  ( $S_0/S_1$ ).

Lógicamente, tiene sentido utilizar este procedimiento cuando los movimientos de  $S_2/S_0$  y  $S_0/S_1$  son conocidos o bien son más fáciles de calcular que el de  $S_2/S_1$ . Al movimiento de  $S_2/S_0$  se le denomina *movimiento relativo*, al de  $S_0/S_1$  *movimiento de arrastre* y al de  $S_2/S_1$  *movimiento absoluto*.

Dado el carácter relativo en sí de cualquier movimiento<sup>1</sup>, conviene señalar que el convenio establecido para designar los movimientos absoluto, relativo y arrastre no establece ninguna condición de privilegio o propiedad especial atribuible a cada uno de ellos. En realidad, la teoría de composición de movimientos permite hallar uno cualquiera de los tres movimientos conocidos los otros dos, lo que permite permutar los conceptos<sup>2</sup>.

Sea  $M$  un punto del sólido  $S_2$  y  $OX_0Y_0Z_0$ ,  $O_1X_1Y_1Z_1$  los sistemas de referencia ligados respectivamente a los sólidos  $S_0$  y  $S_1$  (Figura 1). Como el movimiento de un sólido respecto de un sistema de referencia queda definido por la velocidad de un punto de él y

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

movimiento absoluto pasado a relativo y el relativo a absoluto.



$$\vec{v}_{20}^M = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{S_0}; \quad \vec{\omega}_{20} \text{ y sus derivadas } \vec{a}_{20}^M = \left. \frac{d\vec{v}_{20}^M}{dt} \right|_{S_0}; \quad \vec{\alpha}_{20} = \left. \frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt} \right|_{S_0}$$

- Movimiento de arrastre ( $S_0/S_1$ ):

$$\vec{v}_{01}^M; \quad \vec{\omega}_{01} \text{ y sus derivadas}; \quad \vec{a}_{01}^M = \left. \frac{d\vec{v}_{01}^M}{dt} \right|_{S_1}; \quad \vec{\alpha}_{01} = \left. \frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt} \right|_{S_1}, \text{ considerando ahora el}$$

punto M como perteneciente a  $S_0$ , es decir, el punto de  $S_0$  coincidente con  $M^3$ .

Para determinar el movimiento absoluto ( $S_2/S_1$ ) es necesario conocer  $\vec{v}_{21}^M = \left. \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right|_{S_1}$  y

$$\vec{\omega}_{21}, \text{ siendo las aceleraciones } \vec{a}_{21}^M = \left. \frac{d\vec{v}_{21}^M}{dt} \right|_{S_1}; \quad \vec{\alpha}_{21} = \left. \frac{d\vec{\omega}_{21}}{dt} \right|_{S_1}$$

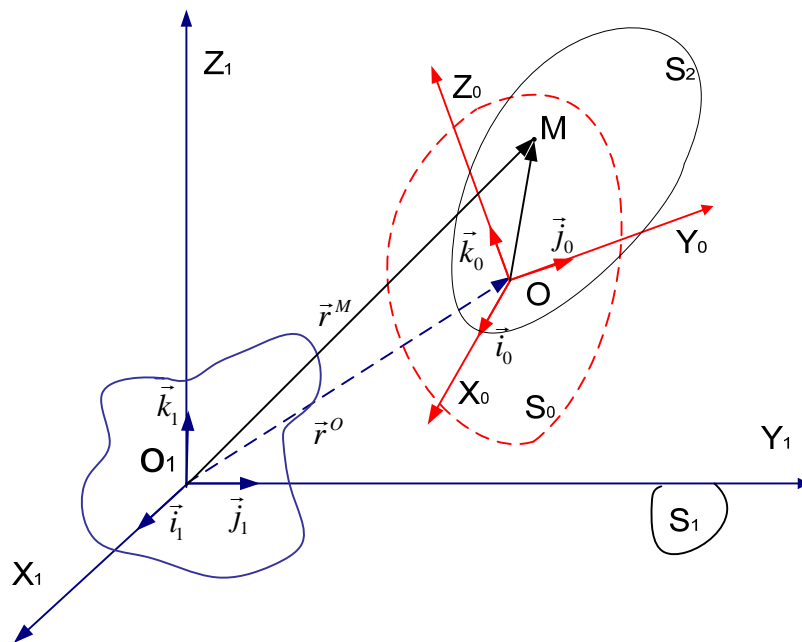


Figura 1: Composición de movimientos

## 2. Composición de velocidades

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

considera que pertenece y de cual es el sistema de referencia del movimiento que se considera.



Y, por definición, la velocidad absoluta es la derivada con respecto al tiempo en el sistema  $S_1$  de dicha expresión

$$\vec{v}_{21}^M = \left( \frac{d\overline{O_1M}}{dt} \right)_{S_1} = \left( \frac{d}{dt} (\overline{O_1O} + \overline{OM}) \right)_{S_1} = \left( \frac{d}{dt} \overline{O_1O} \right)_{S_1} + \left( \frac{d}{dt} \overline{OM} \right)_{S_1}$$

Pero como  $\left( \frac{d\overline{O_1O}}{dt} \right)_{S_1} = \vec{v}_{01}^O$  y  $\left( \frac{d}{dt} \overline{OM} \right)_{S_1} = \left( \frac{d}{dt} \overline{OM} \right)_{S_0} + \vec{\omega}_{01} \wedge \overline{OM}$ , con  $\vec{v}_{20}^M = \left( \frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_{S_0}$ ,

sustituyendo resulta

$$\vec{v}_{21}^M = \underbrace{\left( \frac{d\overline{O_1O}}{dt} \right)_{S_1}}_{\vec{v}_{01}^O} + \vec{\omega}_{01} \wedge \overline{OM} + \underbrace{\left( \frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_{S_0}}_{\vec{v}_{20}^M} = \vec{v}_{01}^O + \vec{\omega}_{01} \wedge \overline{OM} + \vec{v}_{20}^M \quad (\text{CM}_2)$$

Analizando el miembro derecho de esta última ecuación, los dos primeros sumandos coinciden con la expresión del campo de velocidades que nos facilitaría la velocidad  $\vec{v}_{01}^M$ . Nótese que estamos hablando del movimiento del punto M ya no como perteneciente al sólido  $S_2$ , si no como perteneciente al sólido  $S_0$ . Ahora, el movimiento  $S_0/S_1$  de los puntos del sólido  $S_2$  consistirá en ligar el sólido  $S_2$  al sólido  $S_0$ , dando lugar al movimiento de arrastre con respecto a la referencia  $S_1$ . Esta forma de interpretar la ecuación anterior permite reescribir de forma muy sencilla la composición de velocidades del punto de un sólido.

$$\boxed{\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{01}^M + \vec{v}_{20}^M} \quad (\text{CM}_4)$$

A modo de resumen, la *velocidad absoluta* ( $\vec{v}_{21}^M$ ) es la suma de la *velocidad relativa* ( $\vec{v}_{20}^M$ ) y de la *velocidad de arrastre* ( $\vec{v}_{01}^M$ ). Siendo

- $\vec{v}_{21}^M$ , la velocidad que tiene el punto M del sólido  $S_2$  con respecto de un observador ligado al sólido  $S_1$ . Velocidad absoluta del punto del punto M
- $\vec{v}_{20}^M$ . la velocidad que tiene el punto M del sólido  $S_2$  con respecto de un

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



Para obtener la expresión de la composición de velocidades angulares se considera otro punto P del sólido  $S_2$ . Análogamente al punto M, el punto P también ha de verificar

$$\vec{v}_{21}^P = \vec{v}_{01}^P + \vec{v}_{20}^P \quad (\text{CM}_5)$$

Pero entre los puntos M y P considerados como pertenecientes al sólido  $S_2$  o al conjunto  $S_2 S_0$ , de acuerdo con el campo de velocidades de un sólido, también se cumplen las relaciones

- $\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{21}^P + \vec{\omega}_{21} \wedge \overline{PM}$  (CM\_6) en el movimiento de  $S_2/S_1$
- $\vec{v}_{20}^M = \vec{v}_{20}^P + \vec{\omega}_{20} \wedge \overline{PM}$  (CM\_7) en el movimiento de  $S_2/S_0$
- $\vec{v}_{01}^M = \vec{v}_{01}^P + \vec{\omega}_{01} \wedge \overline{PM}$  (CM\_8) en el movimiento de  $S_0/S_1$

Igualando (CM\_4) con (CM\_6), sustituyendo (CM\_7), (CM\_8), (CM\_5) y agrupando, se puede escribir:

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{01}^M + \vec{v}_{20}^M = \vec{v}_{21}^P + \vec{\omega}_{21} \wedge \overline{PM} = \underbrace{\vec{v}_{01}^P + \vec{v}_{20}^P}_{\vec{v}_{21}^P} + (\vec{\omega}_{01} + \vec{\omega}_{20}) \wedge \overline{PM} \quad (\text{CM}_9)$$

Como los puntos P y M son cualesquiera del sólido, para que se verifique (CM\_9) ha de cumplirse

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01} \quad (\text{CM}_{10})$$

Es decir, la expresión para la composición de la velocidad angular es análoga a la de la velocidad lineal. La *velocidad angular absoluta* ( $\vec{\omega}_{21}$ ) es la suma de la *relativa* ( $\vec{\omega}_{20}$ ) y de la de *arrastre* ( $\vec{\omega}_{01}$ ).

### 3. Composición de aceleraciones

Para obtener la expresión de la composición de las aceleraciones lineales se deriva con respecto al tiempo la expresión (CM\_2) obtenida para la composición de velocidades lineales

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



$$\left. \frac{d\vec{v}_{20}^M}{dt} \right)_{S_1} = \left. \frac{d\vec{v}_{20}^M}{dt} \right)_{S_0} + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^M = \vec{a}_{20}^M + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^M \quad (\text{CM}_{12})$$

$$\left. \frac{d(\vec{\omega}_{01} \wedge \overline{OM})}{dt} \right)_{S_1} = \underbrace{\left. \frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt} \right)_{S_1}}_{\vec{\alpha}_{01}} \wedge \overline{OM} + \vec{\omega}_{01} \wedge \underbrace{\left. \frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_{S_1}}_{\underbrace{\left. \frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_{S_0}}_{\vec{v}_{20}^M} + \vec{\omega}_{01} \wedge \overline{OM}} = \vec{\alpha}_{01} \wedge \overline{OM} + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^M + \vec{\omega}_{01} \wedge (\vec{\omega}_{01} \wedge \overline{OM}) \quad (\text{CM}_{13})$$

Sustituyendo y operando se obtiene

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{a}_{20}^M + \vec{a}_{01}^O + \vec{\omega}_{01} \wedge (\vec{\omega}_{01} \wedge \overline{OM}) + \vec{\alpha}_{01} \wedge \overline{OM} + 2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^M \quad (\text{CM}_{14})$$

Análogamente al caso anterior, si se considera  $S_2$  rígidamente unido al  $S_0$  de forma que éste continúa su movimiento arrastrando a  $S_2$ , los puntos O y M pertenecientes a este sólido conjunto se relacionan mediante el campo de aceleraciones

$$\vec{a}_{01}^M = \vec{a}_{01}^O + \vec{\alpha}_{01} \wedge \overline{OM} + \vec{\omega}_{01} \wedge (\vec{\omega}_{01} \wedge \overline{OM}) \quad (\text{CM}_{15})$$

Así, la expresión de la composición de aceleraciones resulta finalmente

$$\boxed{\vec{a}_{21}^M = \vec{a}_{20}^M + \vec{a}_{01}^M + 2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^M} \quad (\text{CM}_{16})$$

Expresión que indica que la *aceleración lineal absoluta* ( $\vec{a}_{21}^M$ ) es la suma de la *aceleración lineal relativa* ( $\vec{a}_{20}^M$ ), de la *aceleración lineal de arrastre* ( $\vec{a}_{01}^M$ ) y de otro término complementario denominado *aceleración de coriolis*<sup>4</sup> ( $2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^M$ ). Siendo

- $\vec{a}_{21}^M$ , la aceleración que tiene el punto M del sólido  $S_2$  con respecto de un observador ligado al sólido  $S_1$ . Aceleración absoluta del punto M
- $\vec{a}_{20}^M$ , la aceleración que tiene el punto M del sólido  $S_2$  con respecto de un observador ligado al sólido  $S_0$ . Aceleración relativa del punto M

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



- $2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{20}^M$ , término no intuitivo que aparece como consecuencia del proceso de derivaciones que se ha ido realizando. Una mitad de esta aceleración de coriolis proviene del hecho de que la variación con respecto al tiempo de la velocidad relativa no es la misma cuando el observador está situado en  $S_1$  o en  $S_0$  (CM\_12). La otra mitad procede del hecho de que la aceleración de arrastre sólo tiene en cuenta la variación de la velocidad de arrastre con respecto al tiempo con el observador ligado al sólido  $S_1$  considerando al punto M perteneciente a  $S_0$ , cuando en realidad pertenece a  $S_2$  (CM\_13).

En cuanto a la composición de aceleraciones angulares, se deriva con respecto al tiempo la expresión (CM\_10)

$$\vec{\alpha}_{21} = \left. \frac{d\vec{\omega}_{21}}{dt} \right)_{S_1} = \left. \frac{d(\vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01})}{dt} \right)_{S_1} = \left. \frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt} \right)_{S_1} + \left. \frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt} \right)_{S_1}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} - \left. \frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt} \right)_{S_1} &= \underbrace{\left. \frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt} \right)_{S_0}}_{\vec{\alpha}_{20}} + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{\omega}_{20} \\ - \left. \frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt} \right)_{S_1} &= \vec{\alpha}_{01} \end{aligned}$$

Se obtiene finalmente

$$\boxed{\vec{\alpha}_{21} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01} \wedge \vec{\omega}_{20}} \quad (\text{CM}_{17})$$

Expresión que indica que la *aceleración angular absoluta* ( $\vec{\alpha}_{21}$ ) es la suma de la *aceleración angular relativa* ( $\vec{\alpha}_{20}$ ), de la *aceleración angular de arrastre* ( $\vec{\alpha}_{01}$ ) y de otro término complementario ( $\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{\omega}_{20}$ ).

#### 4. Movimientos inversos

Conocido el movimiento del sólido  $S_0$  con respecto al sólido  $S_1$  se quiere determinar el movimiento de  $S_1$  con respecto a  $S_0$ . Ambos movimientos reciben el nombre de

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



$$\vec{\omega}_{11} = 0 = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{01} \Rightarrow \vec{\omega}_{10} = -\vec{\omega}_{01} \quad (\text{CM}_{19})$$

Es decir, las velocidades lineales de cualquier punto común a ambos sólidos son iguales y contrarias. También son iguales y contrarias las velocidades angulares.

Análogamente, las expresiones (CM\_16) y (CM\_17) de la composición de aceleraciones se convierte en

$$\vec{\alpha}_{11} = 0 = \vec{\alpha}_{10} + \vec{\alpha}_{01} + \underbrace{\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{\omega}_{10}}_{=0, \text{son } \parallel} \Rightarrow \vec{\alpha}_{10} = -\vec{\alpha}_{01} \quad (\text{CM}_{20})$$

$$\vec{a}_{11}^M = 0 = \vec{a}_{10}^M + \vec{a}_{01}^M + \underbrace{-2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{01}^M}_{\vec{v}_{10}^M = -\vec{v}_{01}^M} \Rightarrow \vec{a}_{10}^M = -\vec{a}_{01}^M + 2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{01}^M \quad (\text{CM}_{21})$$

Expresiones que indican que las aceleraciones angulares son iguales y contrarias, pero las aceleraciones lineales de puntos coincidentes no, salvo que el término  $2\vec{\omega}_{01} \wedge \vec{v}_{01}^M$  sea nulo. Esto ocurre si:

- $\vec{\omega}_{01} = 0 \Rightarrow$  El movimiento es una traslación
- $\vec{v}_{01}^M = 0 \Rightarrow$  El punto M pertenece al *eirmd*, siendo nula la velocidad de mínimo deslizamiento
- $\vec{\omega}_{01} \parallel \vec{v}_{01}^M \Rightarrow$  El punto M pertenece al *eirmd*, siendo  $\vec{v}_{01}^M$  la velocidad de mínimo deslizamiento

## 5. Movimiento de sólidos en contacto

Se consideran dos sólidos  $S_0$  y  $S_1$  que se mueven manteniendo en contacto sus superficies exteriores de forma que en todo momento ambas admitan el mismo plano tangente en el punto de contacto M (Figura 2).

A continuación se va a demostrar la condición cinemática que corresponde a esta condición impuesta al movimiento de  $S_0$  con respecto a  $S_1$ . Para ello, se va a considerar un tercer sólido  $S_2$  que se mueve de forma que en todo momento coincide con el punto de contacto de los sólidos  $S_0$  y  $S_1$ . Con el fin de visualizarlo mejor se puede utilizar el símil

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

superficie, siendo su velocidad  $\vec{v}_{21}^M$  tangente a  $C_1$  y contenida también en el plano tangente común a  $S_0$  y  $S_1$  en  $M$ .

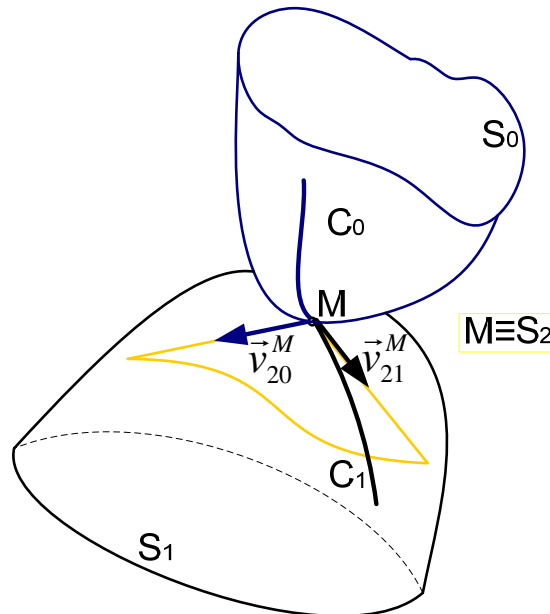


Figura 2: Movimiento de sólidos en contacto

Por composición de movimientos se sabe que

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{01}^M + \vec{v}_{20}^M \Rightarrow \vec{v}_{01}^M = \vec{v}_{21}^M - \vec{v}_{20}^M \quad (\text{CM}_{22})$$

Es decir, cuando dos sólidos se mueven permaneciendo en contacto la velocidad relativa del punto de contacto  $\vec{v}_{01}^M$  también estará contenida en el plano tangente común, siendo ésta la condición cinemática buscada. A esta velocidad  $\vec{v}_{01}^M$  se le denomina *velocidad de deslizamiento*<sup>5</sup> entre los dos sólidos.

El movimiento de  $S_0$  con respecto a  $S_1$  viene definido por la velocidad de un punto y la velocidad angular, pero la condición cinemática determinada establece que ambas velocidades no pueden ser fijadas arbitrariamente, sino que han de ser tales que al calcular la velocidad del punto  $M$  de contacto, ésta debe estar contenida en el plano tangente común a ambos sólidos.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

no serio, pero lo que si debe cumplir es que esté contenida en el plano tangente común por el punto de contacto.





última en dos componentes, una perpendicular al plano tangente común denominada *pivotamiento* ( $\omega_p$ ) y otra paralela al plano tangente común denominada *rodadura* ( $\omega_r$ ).

Si la velocidad de deslizamiento es nula se dice que los sólidos ruedan y pivotan sin deslizar, aunque, por simplicidad, habitualmente se emplea que *ruedan sin deslizar*<sup>6</sup>, dando por sobreentendido que con ello no se excluye el pivotamiento.

Con objeto de fijar ideas, a continuación se describe gráficamente un caso práctico que se presenta con bastante frecuencia en aplicaciones de ingeniería y, por tanto, en los problemas de cinemática.

Se considera un disco de radio R que se desplaza en línea recta rodando sin deslizar con velocidad angular  $\omega$  (Figura 3). Utilizando la teoría de composición de movimientos<sup>7</sup>, este movimiento se puede estudiar como la composición de una traslación en la que todos los puntos del disco se trasladan con la velocidad  $v$  del centro O, con la rotación alrededor del centro O del disco con la velocidad angular  $\omega$ .

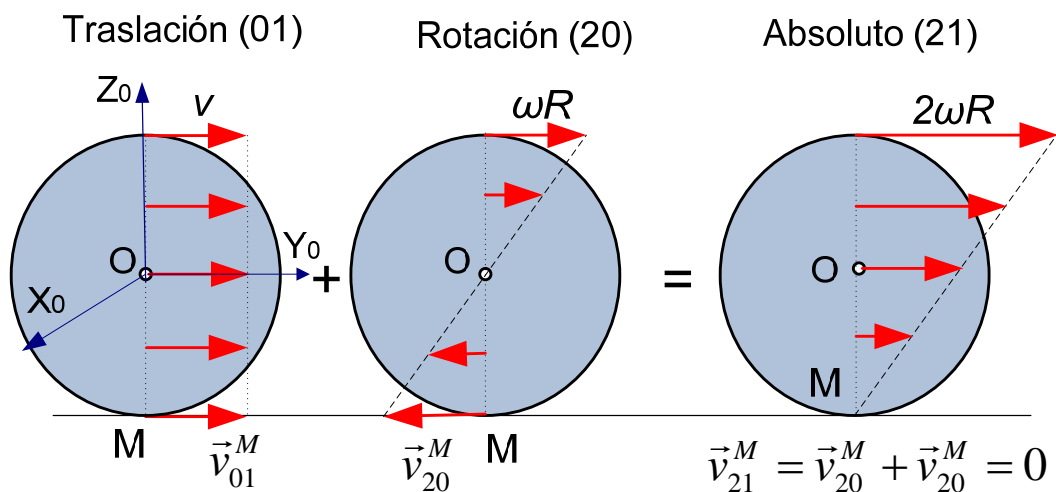


Figura 3: Rodadura sin deslizamiento de un disco

Como el disco no desliza, la velocidad del punto M de contacto en cada instante entre el disco y el suelo es nula. En la figura 3 puede comprobarse que la velocidad de deslizamiento se anula sólo cuando  $\omega = v / R$  (que es el caso, por ejemplo, de la rueda



anciada la rueda

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



frena sobre un pavimento deslizante). Sin embargo, si  $\omega > v / R$ , entonces  $\vec{v}_{01}^M < \vec{v}_{20}^M$  y el disco también desliza pero en el sentido contrario al de la marcha (ahora sería, por ejemplo, la rueda de un coche patinando al tratar de abandonar un suelo arenoso).

## 6. Bibliografía

- Prieto Alberca, M. (1990), *Curso de Mecánica Racional: Cinemática y Estática*, ADI, Madrid

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow shadow is cast beneath the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70