

## Tema 2.2: Notaciones Asintóticas

Diseño y Análisis de Algoritmos



Universidad  
Rey Juan Carlos

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Definiciones informales
- 3 Definiciones formales
- 4 Varios parámetros
- 5 Comentarios adicionales



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Notaciones asintóticas

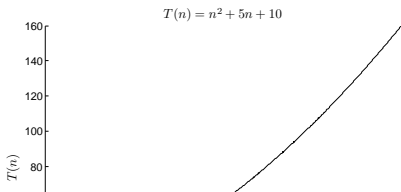
- Nos interesa cómo crece el tiempo de ejecución
  - Según aumenta el tamaño de la entrada
  - “En el límite”, según el tamaño crece sin cota
- Eficiencia asintótica de algoritmos
  - Asumimos que las entradas son muy grandes
  - Nos interesa el “orden de crecimiento”
  - Las constantes y términos de orden inferior no son relevantes, al ser *dominados* por un término de orden superior
- El algoritmo con mejor coste o eficiencia asintótica suele ser la mejor elección

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Tiempo de ejecución de un algoritmo

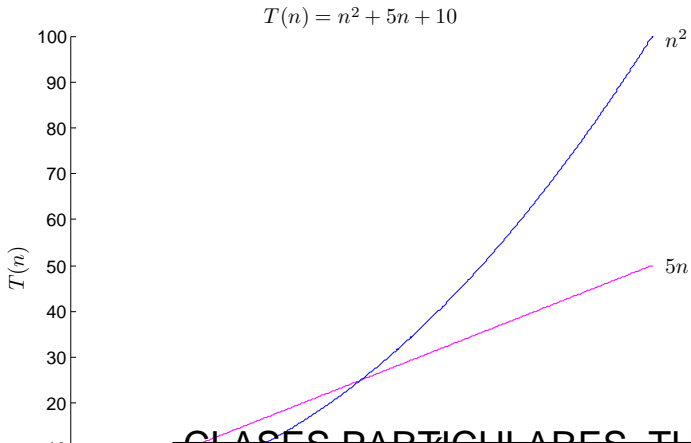
- El tiempo de ejecución lo deberemos expresar mediante una fórmula (función) matemática
  - Es importante saber qué argumentos debe tomar dicha función
- Consideremos la siguiente función:



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Descomposición



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Términos de mayor orden

- El término que más nos importa es  $n^2$ 
  - Es el **término de mayor orden**
  - Puede haber varios (si la función depende de más de un parámetro)
- Para valores pequeños de  $n$  todos los términos influyen
- Mediante la notación asintótica vamos a simplificar y a aislar dichos términos que más influyen cuando  $n$  toma valores muy grandes

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Primeras nociones informales

- Supongamos que tenemos dos funciones  $f(n)$  y  $g(n)$ 
  - $f(n)$  es *asintóticamente menor* que  $g(n)$  cuando:

$$f(n) < g(n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

- $f(n)$  es *asintóticamente mayor* que  $g(n)$  cuando:

$$f(n) > g(n) \iff g(n) < f(n)$$

- $f(n)$  es *asintóticamente igual* que  $g(n)$  cuando:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Órdenes que más aparecen

- Considerados generalmente como “tratables”

$$1 < \log n < n < n \log n < n^2$$

- Considerados generalmente como “intratables”

$$n^2 < n^3 < 2^n < n!$$

- $n^2$  se encuentra en el límite

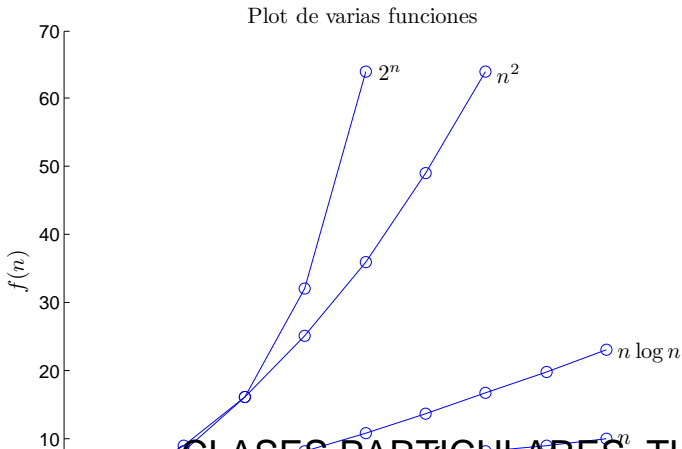
- Siempre hay que tener en cuenta el tamaño de la entrada ( $n$ ) para

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



# Curvas



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Tiempos

$\log n$	$n$	$n \log n$	$n^2$	$n^3$	$2^n$
0	1	0	1	1	2
1	2	2	4	8	4
2	4	8	16	64	16
3	8	24	64	512	256
4	16	64	256	4096	65.536
5	32	160	1024	32.768	4.295.967.296

- Un orden exponencial es extremadamente costoso, incluso frente a

Cartagena99

CLASAS PARTICULARES ONLINE  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Noción informal de cota superior $\mathcal{O}$

- $f(n)$  es asintóticamente menor o igual que  $g(n)$
- $g(n)$  es una cota superior de  $f(n)$  (asintóticamente)

$$f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \iff f(n) \leq g(n)$$

- Ejemplos:

- $2n + 5 \in \mathcal{O}(3n^2 - 8n)$
- $2n + 5 \in \mathcal{O}(n + 10)$
- $2n + 5 \in \mathcal{O}(n!)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Noción informal de cota inferior $\Omega$

- $f(n)$  es asintóticamente mayor o igual que  $g(n)$
- $g(n)$  es una cota inferior de  $f(n)$  (asintóticamente)

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff f(n) \geq g(n)$$

- Ejemplos:

- $2n + 5 \in \Omega(3 \log n)$
- $2n + 5 \in \Omega(4n + 10)$
- $2n + 5 \in \Omega(1)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Noción informal de cota ajustada $\Theta$

- $f(n)$  es asintóticamente igual que  $g(n)$
- $g(n)$  es una cota ajustada de  $f(n)$  (asintóticamente)

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff f(n) = g(n)$$

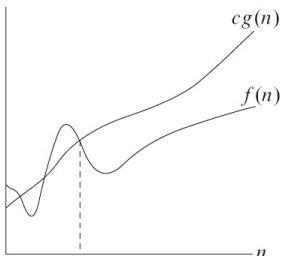
- Ejemplos:
  - $2n + 5 \in \Theta(8n + 10)$
  - $2n + 5 \in \Theta(n)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Definición formal de cota superior $\mathcal{O}$

$$\mathcal{O}(g(n)) = \left\{ f(n) : \exists c > 0 \text{ y } n_0 > 0 / 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n), \forall n \geq n_0 \right\}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Demostración de $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$

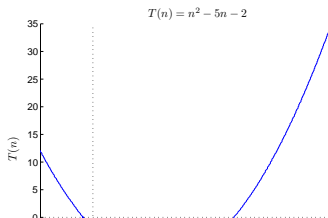
- Para demostrar que una función  $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$  será necesario encontrar **una** (cualquier) pareja de constantes  $c > 0$  y  $n_0 > 0$ , de tal forma que se verifiquen las condiciones de la definición
- Ejemplo: demostrar que  $5n + 2 \in \mathcal{O}(n)$ 
  - Hay que encontrar  $c > 0$  y  $n_0 > 0$  tales que  $5n + 2 \leq cn, \forall n \geq n_0$
  - Para ello, seguimos los siguientes pasos:
    - 1 Elegir una constante adecuada (por ejemplo  $c = 6$ )
    - 2 Buscar un  $n > 0$  tal que se cumpla que  $5n + 2 \leq cn$
  - Para  $c = 6$  se cumple para todo  $n \geq 2$ , luego podemos tomar  $n_0 = 2$ , y hemos encontrado una pareja de constantes (hay infinitas parejas más).

Cartagena99

CLASAS ONLINE PARA TODAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Demostración de $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$

- Ejemplo: demostrar que  $5n + 2 \in \mathcal{O}(n^2)$ 
  - 1 Elegir una constante adecuada (por ejemplo  $c = 1$ )
  - 2 Buscar qué valores de  $n$  hacen que se cumpla que  $5n + 2 \leq n^2$ 
    - Para ello analizamos la desigualdad  $n^2 - 5n - 2 \geq 0$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



# Demostración de $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$

- continuación...
  - $n^2 - 5n - 2$  es una función cuadrática (convexa) con raíces en  $-0,37$  y  $5,37$
  - Por tanto, siempre será positiva para  $n \geq 6$
  - Para  $c = 1$  y  $n_0 = 6$  se cumplen las condiciones de la definición y queda demostrado
- Si escogemos  $c = 5$ ,  $n_0 = 2$  es suficiente
- Si escogemos  $c = 8$ ,  $n_0 = 1$  es suficiente

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Demostración de $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$

- Ejemplo: demostrar que  $3n^2 + 2n - 2 \in \mathcal{O}(n)$ 
  - En este caso no vamos a poder encontrar las constantes (obviamente, ya que no lo podremos demostrar al no ser cierto)
  - Cojamos la constante que cojamos tendríamos que demostrar:

$$3n^2 + 2n - 2 \leq cn \quad \Rightarrow \quad 3n^2 + (2 - c)n - 2 \leq 0$$

para todo  $n \geq n_0$

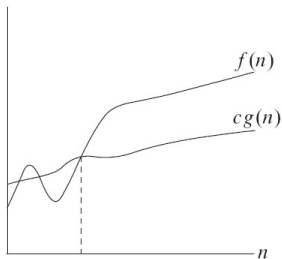
- Como  $3n^2 + (2 - c)n - 2$  es una función cuadrática convexa, que crece hasta el  $+\infty$  según aumenta  $n$ , no va a ser negativa **siempre** a partir de ningún  $n_0$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Definición formal de cota inferior $\Omega$

$$\Omega(g(n)) = \left\{ f(n) : \exists c > 0 \text{ y } n_0 > 0 / 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0 \right\}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Demostración de $f(n) \in \Omega(g(n))$

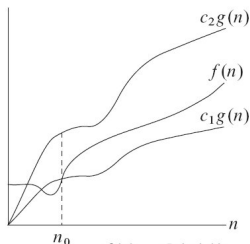
- Ejemplo: demostrar que  $3n^2 + 2 \in \Omega(n)$ 
  - 1 Elegir una constante adecuada (por ejemplo  $c = 5$ )
  - 2 Buscar valores de  $n$  tales que se cumpla  $3n^2 + 2 \geq 5n$ 
    - Hay que ver para qué valores de  $n$  se cumple que  $3n^2 - 5n + 2 \geq 0$
    - $3n^2 - 5n + 2$  es una función cuadrática (convexa) con raíces en  $2/3$  y  $1$
    - Por tanto, siempre será positiva para  $n \geq 1$
    - Para  $c = 5$  y  $n_0 = 1$  se cumplen las condiciones de la definición y queda demostrado

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Definición formal de cota ajustada $\Theta$

$$\Theta(g(n)) = \left\{ f(n) : \exists c_1 > 0, c_2 > 0 \text{ y } n_0 > 0 / \right. \\ \left. 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \forall n \geq n_0 \right\}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Demostración de $f(n) \in \Theta(g(n))$

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff \begin{cases} f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \\ \text{y} \\ f(n) \in \Omega(g(n)) \end{cases}$$

- Ejemplo: demostrar que  $n^2/2 - 3n \in \Theta(n^2)$ 
  - Se busca que  $c_1 n^2 \leq n^2/2 - 3n \leq c_2 n^2$
  - Encontramos, por ejemplo:  $c_1 = 1/14$  para  $n \geq 7$  ( $\Omega$ )
  - Y, por ejemplo:  $c_2 = 1/2$  para  $n \geq 1$  ( $\mathcal{O}$ )
  - En este momento queda demostrado

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Funciones de dos parámetros

- Ejemplo: mezclar dos vectores ordenados de longitudes  $n$  y  $m$ 
  - $T(n, m) \in \Theta(n + m)$
- Definición formal de  $\mathcal{O}$ :

$$\mathcal{O}(g(n, m)) = \left\{ f(n, m) : \exists c > 0, n_0 > 0, \text{ y } m_0 > 0 / \right.$$
$$\left. 0 \leq f(n, m) \leq c \cdot g(n, m), \quad \forall n \geq n_0, \text{ y } m \geq m_0 \right\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Funciones de dos parámetros

- En la práctica usaremos límites

$$f(n, m) > g(n, m) \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n, m)}{f(n, m)} = 0 & \text{y} & \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g(n, m)}{f(n, m)} \neq \infty \\ \text{o} \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g(n, m)}{f(n, m)} = 0 & \text{y} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n, m)}{f(n, m)} \neq \infty \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



# Simplificación

- Simplificar  $\Theta(3m^2n + m^3 + 10mn + 2n^2)$

- 1 Eliminar constantes

$$\Theta(m^2n + m^3 + mn + n^2)$$

- 2 Simplificar términos “contenidos” en otros
  - $m^2n > mn$ , por tanto, se puede eliminar el término  $mn$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{mn}{m^2n} = \frac{1}{m} \neq \infty \quad \text{y} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{mn}{m^2n} = 0$$

$$\Theta(m^2n + m^3 + n^2)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Comentarios adicionales

- Sea  $\rho$  alguna medida de complejidad computacional asintótica
  - Las constantes no importan

$$\rho(kg(n)) = \rho(g(n))$$

- Término de mayor orden de un polinomio

$$\rho(a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x^1 + a_0) = \rho(x^m)$$

- La base de los logaritmos no importa

$$\dots \log_c g(n)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Comentarios adicionales

- $\mathcal{O}$ ,  $\Omega$ , y  $\Theta$  definen **conjuntos**
  - Lo correcto es escribir  $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$
  - A veces se escribe  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ , aunque es un “abuso” de notación
  - Y lo mismo con  $\Omega$  y  $\Theta$
- Las funciones ( $f(n)$ ,  $g(n)$ ,  $f(n, m)$ , etc.) son siempre positivas
- Es un error decir que si  $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ , entonces  $f(n)$  tarda al menos  $g(n)$ 
  - Al contrario, tarda como mucho  $g(n)$  ( $g(n)$  es **cota superior**)
- Con estas definiciones las constantes no influyen: se proporcionan cotas hasta un factor constante multiplicativo.

Cartagena99

CLASAS ONLINE O EN VIVO. CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Comentarios adicionales

- ¡Que un algoritmo tarde  $O(n^2)$ ,  $\Omega(n^2)$ , o  $\Theta(n^2)$  para algunas entradas no quiere decir que tarde  $O(n^2)$ ,  $\Omega(n^2)$ , o  $\Theta(n^2)$  para todas, o en general!
- Cuando hablamos de  $O$  normalmente lo hacemos en referencia al **peor caso**, que es cuando un algoritmo tarda más
  - En ese caso damos una cota **superior** del tiempo o número de operaciones
  - Es como una “garantía” de que el coste nunca va a superar la cota proporcionada
- Cuando se indica una cota, siempre hay que asociarla a un determinado tipo de entrada

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Comentarios adicionales

- Si se pide realizar una demostración **utilizando la definición** debéis encontrar las **constantes** que verifiquen las condiciones de las definiciones
- Si no se pide, podréis usar límites:

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \text{constante} > 0$$

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0 \quad \text{constante o infinito}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

## Comentarios adicionales

- ¡La elección del tamaño de entrada es crucial!

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

- ¿Qué representa  $n$ , el número de bits (3), o el número total de

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Ordenación por comparación

- Supongamos que tenemos un problema de ordenación **por comparación** de una secuencia de datos
  - Solo se usan comparaciones para determinar el orden final
- Los algoritmos que resuelven el problema pueden aplicarse para cualquier tipo de datos (enteros, reales, cadenas, ...)
- Si los datos son reales, ¿merece la pena realizar un estudio sobre la distribución de éstos?
  - NO. Solo interesa el puesto en la ordenación (primero, segundo, ..., último), y no los valores de los reales
- Entonces, ¿cómo se analizan?
  - Escogiendo el caso mejor, peor, medio...
- La cota inferior del tiempo para una secuencia de  $n$  datos es:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES Y TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Ordenación en tiempo lineal

- Existen algoritmos de ordenación que tardan  $\mathcal{O}(n)$ , pero usan otras operaciones diferentes de las comparaciones
- *Counting-sort*
  - Los elementos a ordenar son enteros y pertenecen al intervalo  $[0, k]$
  - Si  $k \in \mathcal{O}(n)$ , entonces el algoritmos tarda  $\Theta(n)$
  - Usa tres vectores:
    - $A[1..n]$ , es el vector de entrada
    - $B[1..n]$ , es el vector de salida
    - $C[0..k]$  es un vector auxiliar

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



## Idea del counting-sort

- Se recorre la secuencia  $A$  y se cuenta el número de veces que aparece cada entero

<b>A</b>	2	5	3	0	2	3	0	3	$n = 8$
----------	---	---	---	---	---	---	---	---	---------

<b>C</b>	2	0	2	3	0	1	$k = 5$
	0	1	2	3	4	5	

- Hay varias formas de obtener el vector ordenado

**Cartagena99**

**B**

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Counting-sort

Counting-sort(A)

FOR  $i=0..k$   $\Theta(k)$   
   $C[i] = 0$

FOR  $j=1..length(A)$   $\Theta(n)$   
   $C[A[j]]++$

FOR  $j=1..k$   $\Theta(k)$   
   $C[i] = C[i] + C[i-1]$

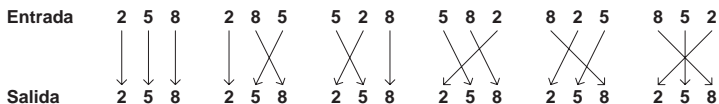
FOR  $j=length(A)..1$   $\Theta(n)$   
   $B[C[A[j]]] = A[j]$   
   $C[A[j]]--$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Algoritmos de ordenación y permutaciones

- Los algoritmos de ordenación por comparación tienen que ser capaces de generar cualquier permutación de un vector:



- Para un vector de  $n$  elementos, hay  $n!$  posibles permutaciones

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Algoritmos de ordenación y comparaciones

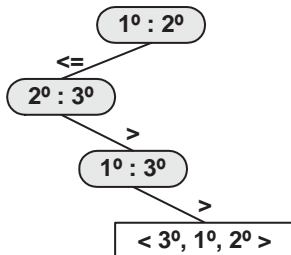
- Deben realizar varias comparaciones hasta determinar la permutación correcta para cualquier entrada

Entrada: 5 8 2

2 5 2 8 2

2 5 2 8

Salida: 2 5 8



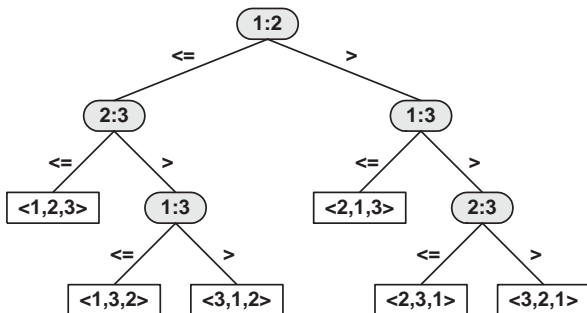
■ Incertidumbre

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Algoritmos de ordenación como árboles de decisión

- Los algoritmos de ordenación pueden verse de manera abstracta en términos de un árbol de decisión:



Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Cota inferior para algoritmos de ordenación

- Cualquier permutación de los  $n$  elementos debe aparecer como hoja del árbol
- Hay  $n!$  permutaciones posibles
- La profundidad o altura máxima de una hoja determina en  $n^\circ$  de comparaciones en el peor caso
- Nos interesaría diseñar un algoritmo cuyo árbol tuviera la profundidad mínima
- Una cota inferior de la altura de árbol en el peor caso es una cota

Cartagena99

CLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Cota inferior para algoritmos de ordenación

## Teorema

Cualquier algoritmo de ordenación por comparaciones necesita  $\Omega(n \log n)$  comparaciones en el peor caso

## Demostración

Tenemos un árbol de decisión de altura  $h$  con  $l$  hojas (hay que demostrar que  $h \in \Omega(n \log n)$ )

- $n! \leq l$ , tiene que haber por lo menos  $n!$  hojas
- $l \leq 2^h$ , un árbol binario de altura  $h$  tiene como mucho  $2^h$  hojas

$$n! \leq l \leq 2^h \Rightarrow n! \leq 2^h$$

$$\log_2(n!) \leq \log_2(2^h) \Rightarrow \log_2(n!) \leq h$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45  
 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
 CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

Demostrar que  $\log_2(n!) \in \Omega(n \log n)$  es un ejercicio para casa/práctica